А.Н. Шелаев **Сведения об авторе**

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ ЗОЛОТЫХ СЕЧЕНИЙ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ВУРФОВ – ОТНОШЕНИЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ

В течение пяти веков со времён Леонардо да Вннчи и Луки Пачоли, назвававших деление отрезка в среднем и крайнем отношении Божественной пропорцией, существовала единственная, причём статичная, геометрическая интерпретация этой пропорции или золотого сечения, как деления отрезка длиной $a+b$ на 2 части a, b, связанные соотношением: $(a+b)/b=b/a$ при $b>a$ или $(a+b)/a=a/b$ при $b<a$. При $a+b=1$ больший из отрезков равняется $\phi=(-1+\sqrt{5})/2\simeq 0,618033\,989$, а меньший $1-\phi=(3-\sqrt{5})/2=\phi^2$.

Поскольку соотношения, равные константам золотого сечения ϕ или $\Phi=1/\phi=1+\phi=(1+\sqrt{5})/2\simeq 1,618\,034...$ постоянно находились в неживой и живой природе, установилось мнение, что константы ϕ, φ являются некими эстетическими критериями гармонии и красоты, но их физический, биологический и т. л. смысл оставался неясным.

Фактически впервые в [1-3] автором данной статьи было показано, что за феноменологическими константами золотого сечения ϕ, Φ скрываются экстремумы некоторых функций (в частности, потенциалов и различных функций средних значений). Так, было установлено, что для гравитационных полей однородных сферических объектов (планет) ускорения свободного падения g оказываются равными в симметричных точках, отстоящих по радиусу от поверхности планеты (внутрь планеты и вне её) на расстояниях $d_1=d_2=R\cdot\phi$ (где $R-$радиус планеты). При этом сумма потенциалов (и, следовательно, их среднее арифметическое) для симметричных относительно поверхности планеты точек имеет минимум именно при этих расстояниях.

Отметим также, что в [4-8] автором статьи были введены электростатические и гравитационные модели как золотых сечений, так и произведений, которыми являются эквипотенциальные линии, соответственно, окружности и овалы Кассини от тонких длинных стержней, заряженных одинаковыми или противоположными по знаку зарядами. Эквипотенциальные же и силовые линии эллипсы и гиперболы одного тонкого заряженного стержня определяют инвариантные суммы и разности.

В данной статье являющейся развитием работ [2,3], вводится обобщённая геометрически-кинематическая модель как внутренних, так и внешних золотых сечений и связанных с ними вурфов. При этом золотое сечение обобщается от указанного выше частного случая деления отрезка прямой линии до отношения переменных отрезков ломаной линии, одни концы которых закреплены, а другие движутся по определённой ниже окружности Полученные результаты были использованы затем для анализа различных как линейных, так и угловых вурфов пирамиды Хеопса. В результате установлено, что великая пирамида может считаться идеальным геометрическим объектом

Итак, определим вначале окружность золотого сечения (см. рис 1). Пусть

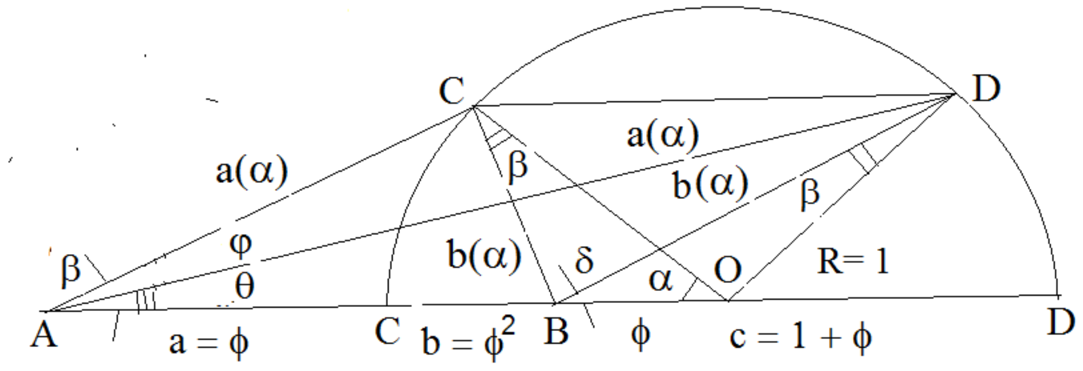

Рис. 1

на плоскости с началом координат в точке A даны две точки: $A(0,0)$ и $B(x_B, 0)$. Тогда геометрическим местом точек $C(x, y)$ или при $\angle COA > \pi/2$ $D(x, y)$, отношение расстояний от которых до точек A, B постоянная величина $k = AC/BC = AD/DB = \text{const}$, есть окружность с центром в точке $O(x_B \cdot k^2/(k^2 - 1),\ 0)$ и радиусом $OM = R = x_B \cdot k/(k^2 - 1)$.

Действительно, поскольку $AC^2 = x^2 + y^2$, $BC^2 = (x_B - x)^2 + y^2$ и так как мы полагаем, что $AC^2 = k^2 \cdot BC^2$, то:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot [x_B k^2 / (k^2 - 1)] \cdot x = x_B^2 \cdot k^2 / (1 - k^2) \qquad (1)$$

Выделяя далее в правой части (1) полный квадрат, получим:

$$[x - x_B \cdot k^2 / (k^2 - 1)]^2 + y^2 = [x_B \cdot k / (k^2 - 1)]^2 \qquad (2)$$

Соотношение же (2) есть уравнение окружности с радиусом $R = x_B \cdot k / (k^2 - 1)$ и центром в точке $O(x_B \cdot k^2 / (k^2 - 1),\ 0)$. $AC = BC$ при $k = 1$, при этом $R = \infty$ и вблизи точек A, B окружность соответствует прямой линии, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему. Центр же окружности находится на прямой AB на бесконечном расстоянии от середины отрезка AB. При уменьшении k и прохождении значения $k = 1$ центр окружности скачкообразно перемещается справа из $+\infty$ влево в $-\infty$!

Укажем вначале исходные расстояния между точками A, C, B, O, D, когда эти точки лежат на одной прямой и угол $\angle AOC = \alpha = 0$. Полагая при этом $x_B = BA = 1$ и $k = \Phi$, с учётом соотношений $\Phi^2 = 1 + \Phi$, $\phi^2 = 1 - \phi$ получим: $R = 1$, $AO = 1 + \phi = \Phi$, $BO = \phi$, $AC = \phi$, $BC = \phi^2$, $AD = 2 + \phi = 1 + \Phi$. Отсюда следует, что в исходном положении $(\alpha = 0)$ внутреннее деление отрезка AB по золотому сечению $AC / B{=}C \quad ({+}AC \quad BC{=})$ равно внешнему делению $AD / BD = (2 + \phi) / (1 + \phi) = \Phi$.

Следуя рис. 1, выразим длины рассматриваемых отрезков при движении точек C, D по окружности через угол α, учитывая то, что при увеличении α точка C, осуществляющая внутреннее деление переходит при $\alpha = \pi / 2$ в точку D, осуществляющую внешнее деление

$$AC(\alpha) = a(\alpha) = \sqrt{AO^2 + OC^2 - 2AO \cdot OC \cdot \cos\alpha} = \sqrt{3 + \phi - 2\cos\alpha} \qquad (3),$$

$$BC(\alpha) = b(\alpha) = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC \cdot \cos\alpha} = \sqrt{2 - \phi - 2\phi\cos\alpha} \qquad (4),$$

$$AD(\alpha) = a(\alpha), \qquad BD(\alpha) = b(\alpha), \qquad \alpha \geq \pi/2 \tag{5}$$

Графики зависимостей $a(\alpha), b(\alpha)$ (кривые 1,2) и $a(\alpha)/b(\alpha) = const = \Phi$ (прямая 3) показаны на рис. 2. Укажем, что $a(0) = \phi$, $b(0) = \phi^2$, $a(\pi/5) = 1$,

$b(\pi/5) = \phi$, $\pi/5 = \pi/(\phi+\Phi)^2 = \arccos\Phi/2$, $a(2\pi/5) = \Phi$, $b(2\pi/5) = \phi$

$a(\pi) = 1+\Phi$, $b(\pi) = 1$, $2\pi/5 = (\phi\Phi + \Phi\phi)\pi/(\phi+\Phi)^2 = \arccos(1/2\Phi)$,

$a(2\pi/3) = \sqrt{2(1+\Phi)}$, $b(2\pi/3) = \sqrt{2}$, $a(\pi/2) = \sqrt{3+\phi}$, $b(\pi/2) = \sqrt{1+\phi^2}$,

$a(\pi) = a_{max} = \Phi + 1$, $b(\pi) = b_{max} = \Phi$.

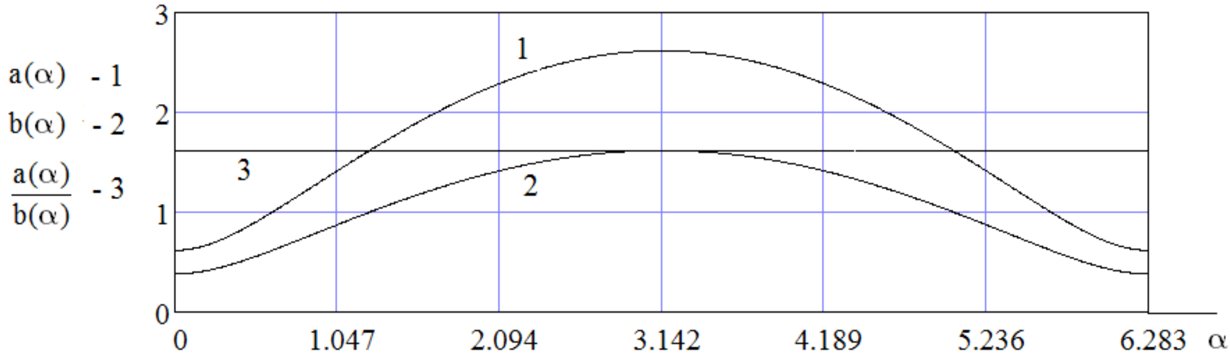

Рис. 2

Важно то, что в построенной кинематической модели золотых сечений исходные соотношения между отрезками при $\alpha = 0$ сохраняются при всех α как для внутренних, так и для внешних сечений:

$$a(\alpha)/b(\alpha) = [a(\alpha)+b(\alpha)]/a(\alpha) = const = \Phi \tag{6}$$

Используем теперь полученные в предложенной обобщённой модели золотых сечений результаты для нахождения и анализа соответствующих им линейных и угловых вурфов, дающих числовые значения из определяемых ниже комбинаций трёх базовых параметров, соответственно, отрезков или углов, характеризующих данный объект.

Прежде чем дать точное определение вурфа - одного из основных понятий проективной геометрии [9,10], укажем, что четвёрка точек на прямой A, C, B, D называется гармонической, если точки C, D делят отрезок A, B в отношениях, равных по модулю и отличающихся только знаком: $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{DB}$. При этом точки A, B называются базовыми, а точки C, D делящими.

Первый пример получения гармонических точек показан на рис. 3. Если в $\triangle AMB$ провести биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине M, то точки C, D разделят отрезок A, B в гармоническом отношении так как, если MC и MD биссектрисы, то $AC/CB = AM/BM$, $AD/DB = -AM/MB$. При этом отрезки AB, CB, AD считаются сонаправленными (имеют положительное напраление), а отрезок DB имеет противоположное (отрицательное) направление.

Второй пример построения гармонических точек показан на рис. 4. В этом случае через данные точки A, B проводятся параллельные прямые AM, BN. Через точки M, N проводится прямая, пересекающая прямую AB в точке D. При заданной точке D соответствующую четвёртую точку C находят следующим образом: на прямой NB откладывают отрезок BK, равный по длине отрезку BN. Затем, соединяя точки K, M, находят искомую точку C, как пересечение прямых KM и AB.

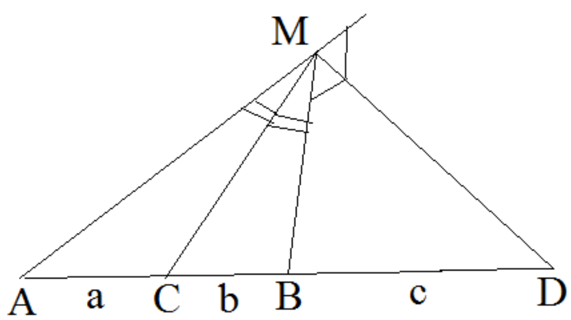

Рис. 3

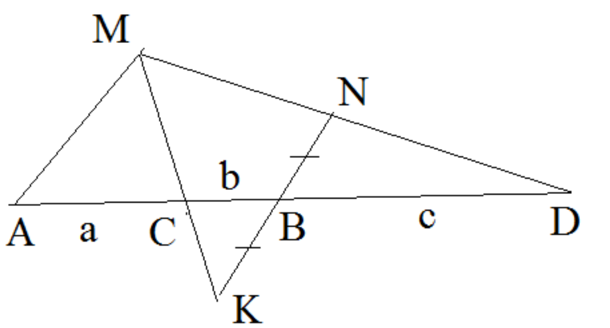

Рис. 4

Для 4-х последовательных точек A, C, B, D или 3-х отрезков a, b, c понятие вурф W_{abc}, введённое немецким математиком Карлом Штаудтом, определяется двумя эквивалентныи формулами:

$$W_{abc} = (a+b)(b+c)/b(a+b+c) = 1 + ac/b(a+b+c) \quad (7)$$

Однако по мнению автора статьи сам термин вурф (от нем. wurf – бросок) является слишком абстрактным, более логичным, по крайней мере в рассматриваемых задачах, было бы использование термина - *отношение гармонических отношений* в соответствии со следующей записью

$$W_{abc} = (a+b)/b : (a+b+c)/(b+c) \tag{8}$$

В общем случае 3 отрезка можно переставить 3 != 6 способами, но, так как W_{abc} не изменяется при перестановке крайних величин ($W_{abc} = Wcba$) и поэтому при $a \neq b \neq c$ существует лишь 3 различных функции $Wabc, Wcab, Wacb$.

На рис. 5 показаны зависимости $Wabc(\alpha), Wcab(\alpha), Wacb(\alpha)$ - кривые 1-3 соответственно, для отрезков $a(\alpha), b(\alpha)$ и $c = const = BD = 1+\phi$ для описанной выше кинематической модели золотых сечений.

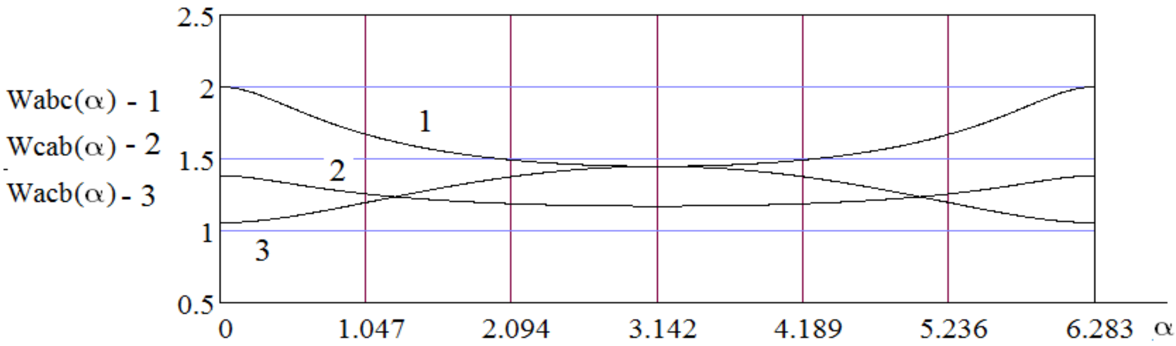

Рис. 5

Для сравнительного анализа приведём характерные значения этих вурфов.

$W_{abc}(0) = W_{abc\,max} = 2$, $\quad W_{abc}(\pi/5) = \Phi^2/2 + 1/2 \simeq 1{,}809\,016\,994$,

$W_{abc}(2\pi/5) = \Phi$, $\quad W_{abc}(\pi) = W_{abc\,min} = 1 + 1/\sqrt{5} \simeq 1{,}447\,213\,395$,

$W_{cab}(0) = W_{cab\,max} = 1 + \phi^2$, $\quad W_{cab}(\pi/5) = \Phi^2/2 \simeq 1{,}309\,016\,994$,

$W_{cab}(2\pi/5) = 2\phi$, $\quad W_{cab}(\pi) = W_{cab\,min} = (8\Phi+5)/(7\Phi+4) \simeq 1{,}170\,820\,393$,

$W_{acb}(0) = W_{acb\,min} = (4\phi+2)/(2\phi+3) \simeq 1{,}055\,728\,090$, $\quad W_{acb}(\pi/5) = \phi + 1/2$,

$W_{acb}(2\pi/5) = W_{cab}(2\pi/5) = 2\phi$, $\quad W_{acb}(\pi/1{,}897\,887\,911) \simeq \Phi^2/2 = W_{cab}(\pi/5)$,

$$W_{acb}(\pi) = W_{acb\,max} = 1 + 1/\sqrt{5} = W_{abc}(\pi).$$

Отметим, что значения вурфа $W_{abc} \approx \Phi^2/2 = 1 + \phi/2 = 1{,}309\,016\,994$ согласно эмпирическим наблюдениям параметров различных объектов в архитектуре и даже живой природе считаются оптимальными для многих объектов [11, 12].

Математическим пояснением этого утверждения могут служить следующие соображения. Как известно, фундаментальная последовательность Фибоначчи, открытая, кстати, ещё в 12 веке при наблюдении за ростом популяции кроликов, характеризуется соотношениями:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \{F_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \qquad (10),$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n / F_{n+1} = \phi, \qquad \lim_{n\to\infty} F_{n+1} / F_n = \Phi \qquad (11)$$

После преобразования следующего гармонического выражения получим:

$$\lim_{n\to\infty} W_n = (F_n + F_{n+1})(F_{n+1} + F_{n+2}) / F_{n+1}(F_n + F_{n+1} + F_{n+2}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} F_{n+2} / F_{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} F_{n+3} / 2F_{n+2} = \Phi \cdot \Phi / 2 = \Phi^2 / 2 = (\Phi + 1)/2 \approx 1{,}309 \qquad (12)$$

Проведённые выше расчёты показали, что при $a = a(\alpha)$, $b = b(\alpha)$, $c = BD = 1 + \phi = \Phi$ оптимальное значение вурфа, равное $\Phi^2/2$, реализуется для $W_{cab}(\pi/5)$, причём при этом имеют место следующие соотношения между отрезками a, b, c:

$$c = \Phi > a(\pi/5) = 1 > b(\pi/5) = \phi, \qquad c = \Phi = a(\pi/5) + b(\pi/5) \qquad (13)$$

Из (13) следует, что при $\alpha = \pi/5$ из отрезков a, b, c при $c = a + b$ нельзя составить треугольник – он вырождается в прямолинейный отрезок.

Найденное условие получения оптимального значения вурфа, соответствующее соотношению между числами Фибоначчи $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, было подтверждено расчётами и для ряда других значений a, b, c. Напр., полагая $a = a(\alpha)$, $b = b(\alpha)$, $c = AB = 1$ получим, что значение Φ^2 имеют следующие вурфы:

$$W_{abc}(\pi) = \Phi^2 / 2, \quad a(\pi) = \Phi + 1 > b(\pi) = \Phi > c = 1, \quad a = b + c \qquad (14),$$

$$W_{cab}(0) = \Phi^2 / 2, \quad c = 1 > a(0) = \Phi > b(0) = \Phi^2, \quad c = a + b \qquad (15)$$

В то же время для случая $a = a(\alpha)$, $b = b(\alpha)$, $c = BD = 1 + \phi = \Phi$ установлено, что при $\alpha_o \simeq 1{,}655\,309 \simeq 49\pi / 93 \simeq 94{,}842^o$

$$W_{acb}(\alpha_o) = \Phi^2 / 2, \quad a(\alpha_o) \simeq 1{,}972\,612, \quad b(\alpha_o) \simeq 1{,}219\,141, \quad a \neq b + c \qquad (16)$$

Из (16) следует, что условие $a = b + c$ для получения величины вурфа, равной $\Phi^2 / 2$, не является обязательным.

Отметим, что значение вурфа $\Phi^2 / 2$ не реализуется ни для равностороннего треугольника (при $a = b = c$ $W_{abc} = 4/3 = 1{,}333...$), ни для отрезков, дающих внутреннее и внешнее золотые сечения, при $a = \phi$, $b = \phi^2$, $c = 1 + \phi$ $W_{abc} = 1 + \phi^2 \simeq 1{,}382$, $W_{acb} = 2$, $W_{bac} = 2(1 + 2\phi) / (3 + 2\phi \simeq 1{,}056)$

Проведём далее исследования гармонических соотношений для основных углов кинематической модели. Укажем вначале, что при $\alpha \leq \pi / 2$ $\angle CAB = \angle BCO = \beta(\alpha)$, при $\alpha \geq \pi / 2$ $\angle DAB = \theta(\alpha) = \beta(\alpha) = \angle BDO$. При этом:

$$\angle C(D)AB = \beta(\alpha) = \left| \arcsin[(\sin\alpha) / a(\alpha)] \right|, \qquad (17),$$

$$\angle C(D)BO = \delta(\alpha) = \left| \arcsin[(\sin\alpha) / b(\alpha)] \right| \qquad (18)$$

Графики $\beta(\alpha)$ и $\delta(\alpha)$ и их отношения $\beta(\alpha) / \delta(\alpha)$ показаны на рис. 6.

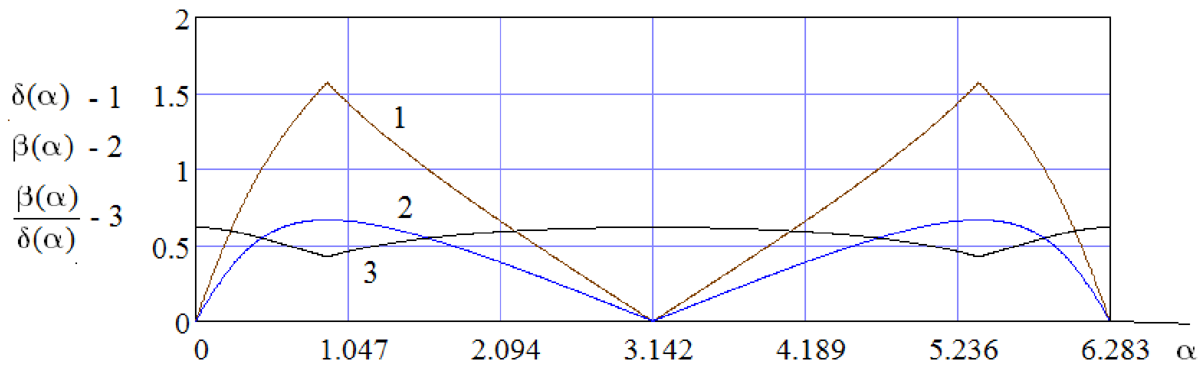

Рис. 6

Интересно, что хотя $\lim\limits_{\alpha \to 0, \pi} \beta(\alpha) = 0$, $\lim\limits_{\alpha \to 0, \pi} \delta(\alpha) = 0$, предел их отношения

$$\lim_{\alpha \to 0,\, \pi} \beta(\alpha)/\delta(\alpha) = \phi!$$

Кроме того, как следует из рис. 6, кривые $\delta(\alpha)$ и $\beta(\alpha)/\delta(\alpha)$ имеют излом при $\alpha = \arccos\phi \simeq 51{,}827\,924^{o}$, поскольку при этом α $OC \perp AC$, $\angle\varphi = 0$ и угол β становится максимальным $\beta(\arccos\phi) = \beta_{\max} \simeq 38{,}172\,707^{o}$ и равным углу θ. Угол δ также принимает максимальное значение $\delta_{\max} = \pi/2$.

Для углов $\beta(\alpha)$, $\delta(\alpha)$ и $\gamma(\alpha) = \beta(\alpha) + \delta(\alpha)$ были рассмотрены 3 следующих вурфа $W_{\gamma\beta\delta}(\alpha)$, $W_{\gamma\delta\beta}(\alpha)$ и $W_{\beta\gamma\delta}(\alpha)$, графики которых показаны на рис. 7.

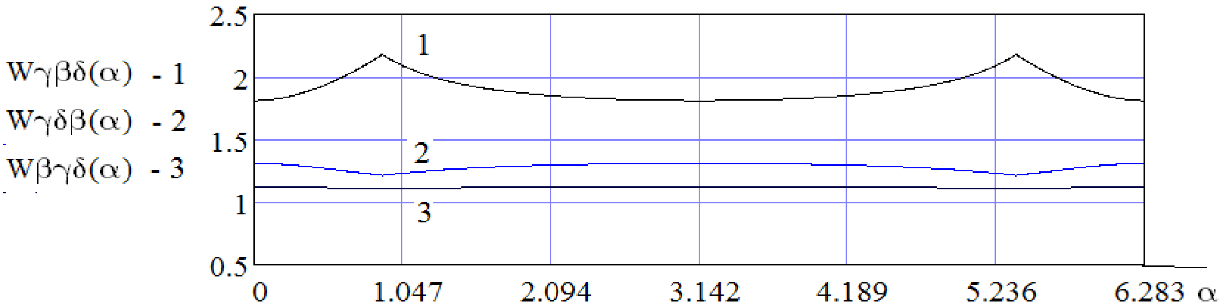

Рис. 7

Для сравнительного анализа укажем характерные значения этих вурфов:

$$W_{\gamma\beta\delta}(0) = W_{\gamma\beta\delta}(\pi) = W_{\gamma\beta\delta\ \min} = \Phi^2/2 + 1/2 \simeq 1{,}809\,016\,994,$$

$$W_{\gamma\beta\delta}(\arccos\phi) = W_{\gamma\beta\delta\ \max} \simeq 2{,}178\,852\,714,$$

$$W_{\gamma\delta\beta}(0) = W_{\gamma\delta\beta}(\pi) = W_{\gamma\beta\delta\ \max} = \Phi^2/2 \simeq 1{,}309\,016\,994,$$

$$W_{\gamma\delta\beta}(\arccos\phi) = W_{\gamma\beta\delta\ \min} \simeq 1{,}212\,070\,598,$$

$$W_{\beta\gamma\delta}(0) = W_{\beta\gamma\delta}(\pi) = W_{\beta\gamma\delta\ \max} = \Phi + 1/2 \simeq 1{,}118\,033\,989,$$

$$W_{\beta\gamma\delta}(\arccos\phi) = W_{\beta\gamma\delta\ \min} \simeq 1{,}104\,562\,116\,.$$

Таким образом, даже при $\gamma(\alpha) = \beta(\alpha) + \delta(\alpha)$ и «правильном» порядке индексов $\gamma(\alpha) > \delta(\alpha) > \beta(\alpha)$ для вурфа $W_{\gamma\delta\beta}(\alpha)$ удалось получить «оптимальное» значения вурфа $\Phi^2/2 \simeq 1{,}309$ лишь при $\alpha = 0, \pi.$.

В то же время при «неправильных» порядках индексов $\gamma(\alpha) > \beta(\alpha) < \delta(\alpha)$

для вурфа $W_{\gamma\beta\delta}(\alpha)$ и $\beta(\alpha) < \gamma(\alpha) > \delta(\alpha)$ для вурфа $W_{\beta\gamma\delta}(\alpha)$ «оптимальное» значение $\Phi^2 / 2$ вообще не реализуется ни при каких α. Хотя следует отметить и возможность получения нового интересного результата: значение вурфа $W_{\beta\gamma\delta}(\alpha)$ оказалось почти равным константе $\phi + 1/2 \simeq 1{,}118$, относительно близкой к оптимальному значению при всех α.

В заключение проведём расчёт ряда вурфов для одного из самых знаменитых артефактов – пирамиды Хеопса, для которой в [13] автором статьи был получен ряд важных и интересных соотношений, свидетельствующих о высокой геометрической гармонии данного сооружения.

Основанием пирамиды Хеопса (см. рис. 8) является квадрат со стороной $AB \simeq 230{,}3$ м, высотой $SO \simeq 146{,}6$ м и рёбрами $SA = SB = SC = SD \simeq 225$ м. В единице длины $\ell = 115{,}15$ м $AB = 2$, $OM = ON = 1$, $SO \simeq \sqrt{\Phi}$, $SA \simeq \sqrt{\Phi^2 + 1}$, $SM \simeq \Phi$, $\angle SMO \simeq \mathrm{arctg}\sqrt{\Phi} \simeq 51{,}827\,923^{o}$, $\angle SAO \simeq \mathrm{arctg}\sqrt{\Phi / 2} \simeq 41{,}969\,915^{o}$.

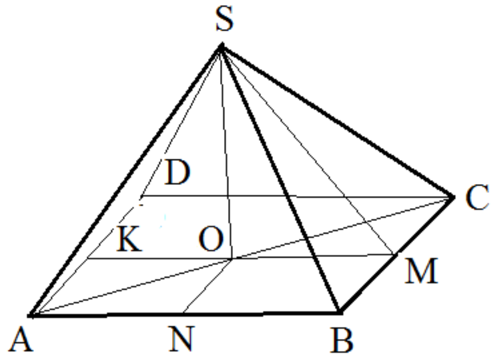

Рис. 8

Полагая, что пирамида Хеопса определяется диагональным треугольником ASC, найдём следующий вурф для трёх отрезков a, b, c:

$$a = AC = 2\sqrt{2}, \quad b = AS = \sqrt{\Phi^2 + 1}, \quad c = SO = \sqrt{\Phi}. \quad W_{abc} \simeq 1{,}315113 \qquad (19)$$

Из (19) следует, что полученное значение вурфа близко к оптимальному значению: $W_{abc} \approx \Phi^2 / 2 \simeq 1{,}309\,017$.

В то же время полагая, что пирамида определяется треугольником ASO - половиной диагонального треугольника ASC, получим:

$$a = AS = \sqrt{\Phi^2 + 1}, \quad b = AO = \sqrt{2}, \quad c = SO = \sqrt{\Phi}, \quad W_{abc} \simeq 1{,}372\,871 \qquad (20)$$

Новое значение вурфа (20) оказалось не только не равным предыдущему, но и сильнее отличающимся от оптимального.

Аналогичные результаты были получены для треугольников SMK и SMO, лежащих в сечении пирамиды параллельном стороне основания:

$$a = MK = 2, \quad b = SM = \Phi, \quad c = SO = \sqrt{\Phi}, \quad W_{abc} \simeq 1{,}321\,631 \qquad (21),$$

$$a = SM = \Phi, \quad b = SO = \sqrt{\Phi}, \quad c = MO = 1, \quad W_{abc} \simeq 1{,}388\,757 \qquad (22)$$

Наконец, укажем значения вурфов для углов в треугольниках SMO и SAO:

$$\angle SOB = \gamma = 90^{o}, \angle SMO = \delta \simeq 51{,}828^{o}, \ \angle OSM = \beta \simeq 38{,}172^{o}, \ W_{\gamma\delta\beta} \simeq 1{,}368, \quad (23),$$

$$\angle SOA = \gamma = 90^{o}, \angle OSA = \delta \simeq 48{,}031^{o}, \ \angle SAO = \beta \simeq 41{,}970^{o}, \quad W_{\gamma\delta\beta} \simeq 1{,}436 \quad (24)$$

Полученные результаты, казалось бы, позволяют сделать вывод о том, что пирамида Хеопса не является идеальным геометрическим объектом. Однако это не так, поскольку в ходе дальнейшего детального анализа геометрии пирамиды были выявлены новые важные соотношения, прежде всего, для радиусов различных сфер вписанных в пирамиду.

Так, радиус сферы $r_S = QO = QP$ $(s - \text{sphere})$, вписанной в пирамиду (см. рис.8) с $SO = h$ и $KO = OM = d$ и $\angle SMO = \angle SKO = \psi$ при учёте того, что $tg\psi = 2tg(\psi/2)/[1 - tg^2(\psi/2)]$, определяется соотношением:

$$r_S = d \cdot tg(\psi/2) = d \cdot [\sqrt{h^2 + d^2} - d]/h \qquad (25)$$

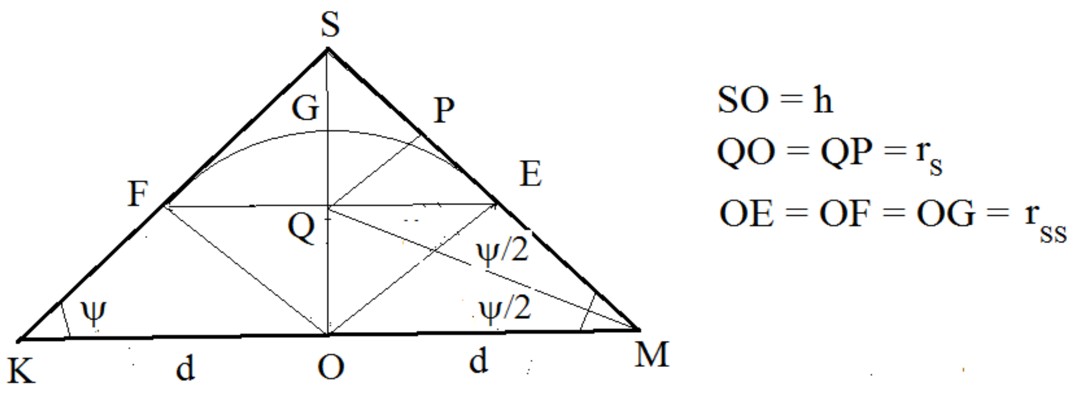

Рис. 8

Зависимость же радиуса полусферы r_{SS} (ss - semisphere), вписанной в пирамиду (см. рис. 8) так, что плоскость, проходящая через центр полусферы совпадает с плоскостью, в которой лежит основание пирамиды имеет вид:

$$r_{SS} = d \cdot \sin\psi = d \cdot h / \sqrt{h^2 + d^2} \qquad (26)$$

Радиусы $r_S(h)$ и $r_{SS}(h)$ монотонно растут с ростом h, однако, трудно предсказуемым явилось, во-первых, обнаружение того, что разность радиусов $\Delta r(h) = r_{SS}(h) - r_S(h)$ (см. рис. 9) имеет экстремум – максимум и именно при $h = \sqrt{\Phi}$!!.

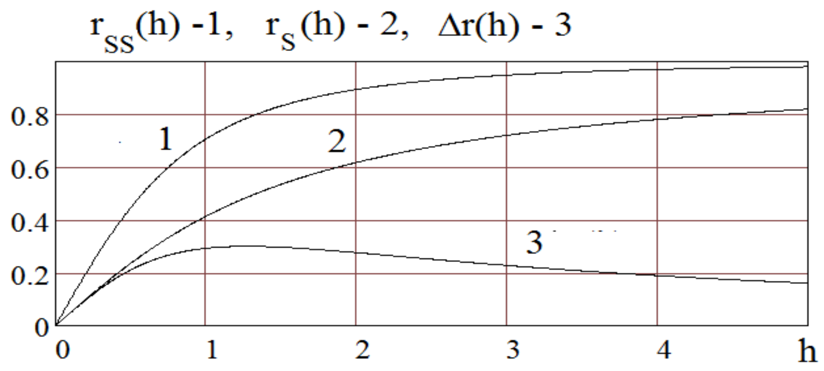

Рис. 9

Вз=вторых, заранее было трудно предположить, что при $h = \sqrt{\Phi}$ выполняются следующие замечательные соотношения:

$$r_{SS}(\sqrt{\Phi}) = \phi^{1/2}, \quad r_S(\sqrt{\Phi}) = \phi^{3/2}, \quad r_{SS}(\sqrt{\Phi}) + r_S(\sqrt{\Phi}) = \phi^{1/2} + \phi^{3/2} = \sqrt{\Phi} = h \qquad (27)$$

Подчеркнём, что наличие найденного экстремума характерно лишь для пирамиды данных размеров, а также для подобных ей пирамид.

Полагая $a = h = \sqrt{\Phi}$, $b = r_{SS} = \Phi^{1/2}$, $c = r_S = \phi^{3/2}$, получаем весьма важный результат - пирамида Хеопса имеет оптимальные значения вурфов (!):

$$W_{abc} = \Phi^2 / 2, \qquad W_{acb} = \Phi^2 / 2 + 1/2, \qquad W_{acb} = \phi + 1/2 \qquad (28)$$

Полученные соотношения (28) позволяют назвать Великую пирамиду идеальным геометрическим объектом !!

Таким образом, для всестороннего анализа геометрических свойств объектов требуется вычисление различных вурфов, как линейных, так и угловых, чтобы найти наиболее значимые параметры, максимально определяющие специфику данного объекта.

Можно также предположить, что объекты с оптимальными геометрическими характеристиками могут иметь и лучшие физические или иные свойства, напр., минимальное сопротивление в процессе движения в воздушной или жидкой среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А.Н.Шелаев.* Соотношения гармонии для внутренних и внешних гравитационных полей однородных тел и экстремумы функций средних значений для потенциалов и ускорений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, С.115-118.

2. *А.Н. Шелаев.* Соотношения гармонии в обобщённой геометрической модели золотых сечений и функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки , 2011, № 2, С.118-120.

3. *А.Н Шелаев*. Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей экстремумы длин площадей и их производных. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл. № 77—6567, публ. 17431, 29.04.2012. = 8 С

4. *А.Н. Шелаев*. Электростатическая модель золотых сечений и функций средних значений. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл, № 77-6567, публ. 17511, 08.06.2012. – 9 С.

7. *А.Н.Шелаев*. Электростатические и гравитационные можели инвариантных произведений. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М. Эл., № 77-6567, публ. 17609, 06, 06.08.2012. =12 С.

8. *А.Н.Шелаев*. Электростатические модели инвариантных сумм и разностей – софокусные эллипсы и гиперболы как эквипотенциальные линии тонких равномерно-заряденных стержней. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл,, № 77-6567, публ, 18066, 13.06.2013. = 7 С.

9. *Р.Н. Щербаков, Л.Ф.Пичурин*. От проективной геометрии к неевклидовой. М., Просвещение, 1979. – 158 С.

10. *Мацуо Комацу.* Многообразие геометрии. Пер. с японск. М, Мир,1981. - 208 С.

11.*С.В.Петухов.* Геометрия живой природы и алгоритмы свмоорганизации. М., Знание, 1988. - 48 С.

12. *С.В.Петухов.* Матричная генетика, алгоритмы генетического кода, помехоустойчивость. М.- Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2008. - 316 С.

13. *А.Н.Шелаев*. К раскрытию геометрических тайн великих пирамид. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл,, № 77-6567, публ, 17965, 31.03.2013. - 8 С.