Alexey Stakhov, Samuil Aranson

Hilbert's Fourth Problem as a Possible Candidate on the MILLENNIUM PROBLEM in Geometry

Недавно British Journal of Mathematics and Computer Science опубликовал статью **Alexey Stakhov, Samuil Aranson. Hilbert's Fourth Problem as a Possible Candidate on the MILLENNIUM PROBLEM in Geometry (**British Journal of Mathematics and Computer Science, 12(4), 1-25, 2016)

Аннотация

Четвертая проблема Гильберта является одной из важных математических проблем, сформулированных Гильберта в 1900 г. К сожалению, попытки решить эту проблему в течение 20-го века не привело к общепризнанному решению, и в настоящее время современные математики считают, что проблема была сформулирована Гильбертом "очень неопределенно" (“very vague”), и это является причиной того, что она до сих пор не решена. Основная цель настоящей статьи заключается в том, чтобы изложить оригинальное решение этой проблемы и подчеркнуть, что эта проблема заслуживает ее признания как ПРОБЛЕМЫ ТЫСЧЕЛЕТИЯ В ГЕОМЕТРИИ, которая имеет междисциплинарный значение и влияет не только на геометрию, но и на все теоретическое естествзнание. Источником нового подхода к решению этой проблемы является новая ветвь математики, **Математика Гармонии**, которая восходит в своих истоках к Евклиду и имеет междисциплинарное значение для современной науки.

1. Научные результаты, использованные в настоящем исследовании

В нашем исследовании мы использовали следующие научные результаты:

1.1. Формулы Бине, позволяющие представить в аналитическом виде через золотую пропорцию» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ так называемые «расширенные» числа Фибоначчи

1.2. Симметричные гиперболические функции Фибоначчи (Алексей Стахов, Борис Розин, 2005). Этот математический результат описан в работе Stakhov, A., Rozin, B. On a new class of hyperbolic functions. Chaos, Solitons & Fractals, Vol.23, No 2, 2005:

Fibonacci hyperbolic sine:

$$sF(x)=\frac{\Phi^x-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}sh(x\ln\Phi)$$

Fibonacci hyperbolic cosine:

$$cF(x)=\frac{\Phi^x+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}ch(x\ln\Phi)$$

The Golden Ratio:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803$$

The basic relation:

$$\left[cF(x-1)\right]^2-sF(x-2)sF(x)=1$$

2.3. «**Геометрия Боднара»** как новая гиперболическая геометрия живой природы, лежащая в основе ботанического явления филлотаксиса.

2.4. Лямбда-числа Фибоначчи, которые являются обобщением классических чисел Фибоначчи и задаются следующим рекуррентным соотношением:

$$F_\lambda(n+2)=\lambda F_\lambda(n+1)+F_\lambda(n);\, F_\lambda(0)=0,\, F_\lambda(1)=1.$$

Начиная с конца 20 в., к этому рекуррентному соотношению было приковано внимание многих исследователей из различных стран и континентов (аргентинский математик Vera W. de Spinadel, французский математик Midhat Gazale, американский математик Jay Kappraff, российский инженер Александр Татаренко, армянский философ и физик Грант Аракелян, российский исследователь Виктор Шенягин, украинский физик Николай Косинов, испанские математики Sergio Falcon and Angel Plaza).

2.5. «Металлические пропорции» Веры Шпинадель. Изучение указанного выше рекуррентного соотношения привело Веру Шпинадель к открытию бесконечного количества математических констант $\Phi_\lambda(\lambda=1,2,3,...)$, которые при заданном $\lambda\in\{1,2,3,...\}$ равны положительному корню следующего характеристического уравнения:

$$x^2-\lambda x-1=0.$$

Вера Шпиндель назвала эти константы «metallic means” («металлические пропорции»). Металлические пропорции задаются следуюшим выражением:

$$\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$$

Састным случаем «metallic means” является классическая «золотая пропорция» (λ=1).

Первые четыре «metallic means” приведены ниже:

$$\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\text{the Golden Mean}, \lambda=1);$$
$$\Phi_2=1+\sqrt{2}\ (\text{the Silver Mean}, \lambda=2);$$
$$\Phi_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\ (\text{the Bronze Mean}, \lambda=3);$$
$$\Phi_4=2+\sqrt{5}\ (\text{the Cooper Mean}, \lambda=4).$$

2.6. Формулы Газале. Эти формулы впервые были описаны в замечательной книге **Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999** (книга переведена на русский язык), написанной французским математиком и инженером египетского происхождения **Midhat Gazale.** Формулы Газале являются аналитическим выражением «расширенных» λ-чисел Фибоначчи . Они являются обобщением «формул Бине» и выражаются следующим образом:

$$F_\lambda(n)=\begin{cases}\dfrac{\Phi_\lambda^n-\Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}} & \text{for}\quad n=2k\\[2ex] \dfrac{\Phi_\lambda^n+\Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}} & \text{for}\quad n=2k+1\end{cases}$$

2.7. Гиперболические λ-функции Фибоначчи. Формулы Газале являются источником для введения гиперболических λ-функций Фибоначчи:

Hyperbolic Fibonacci λ-sine and λ-cosine

$$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}==\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right]$$

$$cF_{\lambda}(x)=\frac{\Phi_{\lambda}^{x}+\Phi_{\lambda}^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}==\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{x}+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right]$$

Эти функции были введены Алексеем Стаховым в 2006 г., а их общая теория изложена в статье: Alexey Stakhov. On the general theory of hyperbolic functions based on the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions and on Hilbert's Fourth Problem. Visual Mathematics, Volume 15, No.1, 2013

http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/2013stakhov/hyp.pdf

3. Оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта

3.1. Формулировка 4-й проблемы Гильберта. Естественно, что Гильберт не мог пройти мимо нерешенных математических проблем, связанных с неевклидовой геометрией. Саму же 4-ю проблему Гильберт формулирует так:

«Более общий вопрос, возникающий при этом, заключается в следующем: возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии».

В качестве геометрий, наиболее близких к евклидовой геометрии, Гильберт называет геометрию Лобачевского (гиперболическую геометрию) и геометрию Риммана (эллиптическую геометрию).

3.2. Классическая модель плоскости Лобачевского. Как известно, классическая модель плоскости Лобачевского в псевдосферических координатах (u,v), $0<u<+\infty, 0<v<+\infty$, имеющей гауссову кривизну $K=-1$ (интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере), имеет вид:

$$(ds)^2=(du)^2+sh^2(u)(dv)^2, \qquad (1)$$

где $ds-$ элемент длины, $sh(u)$ - гиперболический синус. Как вытекает из этой формулы, ключевую роль в ней играет классический гиперболический синус.

3.3. «Золотые» метрические λ-формы плоскости Лобачевского. Развивая идею метрической формы плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (1), авторами (Стаховым и Арансоном) предложено бесконечное множество метрических форм плоскости Лобачевского, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи. Доказано, что эти метрические формы, задаваемые в координатах $(u,v), 0<u<+\infty, -\infty<v<+\infty$, имеют гауссову кривизну $K=-1$ и представляются в виде:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2, \tag{2}$$

где $\Phi_\lambda = \frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - металлическая пропорция и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ-синус Фибоначчи. Формы (2) названы *метрическими λ-формами плоскости Лобачевского.*

Современный взляд на псевдосферические метрики (1) и (2) с точки зрения поверхности псевдосферы в трёхмерном евклидовом пространстве. Координаты (u,v) метрических форм (1) и (u,v) в (2) используются для двух различных параметризаций поверхности псевдосферы M в трёхмерном евклидовом пространстве.

Совокупность этих двух параметризаций индуцирует взаимно-однозначное отображение $f: M \mapsto M$, а метрические же формы (1) и (2) задают внутреннюю геометрию псевдосферы M.

Это даёт возможность с использованием отображения $f : M \mapsto M$ и метрических форм (1) и (2) вычислять и сравнивать на поверхности псевдосферы M таких величин, как гауссова кривизна K (в данном случае K=-1) , длины (изометрия), углы (конформность), площади (эквиарельность) .

В данной ситуации мы получаем, что отображение $f : M \mapsto M$, индуцированное формами (1) (2), **не является** ни изометрией (не сохраняет длины), ни конформным (не сохраняет углы, хотя сумма углов любого геодезического треугольника по-прежнему меньше 180 градусов), ни эквиарельным (не сохраняет площади) .

Новизна данного исследования состоит в том, что получено бесконечное множество псевдосферических метрических $\lambda-$форм плоскости Лобачевского ($\lambda>0$-заданное положительное число), задаваемых выражением (2), сохраняющих гауссову кривизну *K*=-1, но индуцирующих на псеведосфере другие метрические свойства, по сравнению с формой (1) (не сохранение длин, углов, площадей).

А это означает, что новые модели плоскости Лобачевского, задаваемые (2), *"могут рассматриваться как ближайшие геометрии к обыкновенной геометрии Евклида»* (Давид Гильберт). Таким образом, формула (2) и является решением 4-й проблемы Гильберта. Она задает бесконечное количество новых геометрий Лобачевского, обладающих так называемыми *рекурсивными свойствами.*

3.4. Новая задача для теоретического естествознания. Как известно, «геометрия Боднара» является новой гиперболической геометрией Природы, имеющей отнощение к ботаническому явлению филлотаксиса. Она основана на симметричных гиперболических функциях Фибоначчи, основанием которых является «золотая пропорция». Новая геометрическая теория филлотаксиса, основанная на симметричных гиперболических функциях Фибоначчи, вселяет надежду, что гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка и новые «геометрии Лобачевского», вытекающие из решения 4-й проблемы Гильберта, найдут практические приложения в современной науке.

Однако, гиперболичесие функции Фибоначчи являются частным случаем гиперболических λ-функций Фибоначчи. Последние основываются на «металлических пропорциях»), в частности, на «серебряной», «бронзовой», «медной» и другим видам «металлических пропорций». В этой связи у нас есть все основания высказать предположение, что и другие типы гиперболических λ-

функций могут стать основой для моделирования новых «гиперболических миров», которые могут реально существовать в природе, но которые наука до сих пор не обнаружила, потому что современной науке были неизвестны гиперболические λ-функции Фибоначчи и перед ней никто не ставил такой задачи. **Основываясь на блестящем успехе «геометрии Боднара», мы можем поставить перед теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания задачу поиска новых «гиперболических миров» природы, основанных на других классах гиперболических λ-функций Фибоначчи.**

Заключение

Принимая во внимание важность четвертой проблемы Гильберта не только для геометрии, но и для всего теоретического естествознания, авторы настоящей статьи взяли на себя смелость утверждать, что **Четвертая проблема Гильберта ничем не уступает ПРОБЛЕМАМ ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ, сформулированным й Математическим институтом Клея, по своей научной значимоси. Она не была включена в состав ПРОБЛЕМ ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ только по ошибке** (современные математики не смогли понять и оценить значимость этой проблемы и возложили всю ответственность за ее решение на самого Гильберта, который, по их мнению, ее «нечетко сформулировал»), Эти аргументы привели авторов к выводу, что **Четвертая Проблема Гильберта заслуживает того, чтобы быть признанной в качестве ПРОБЛЕМЫ ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ В ГЕОМЕТРИИ. Ее включение в список ПРОБЛЕМ ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ, сформулированных Математическим институтом Клея, еще больше поднимает значимость этих проблем для развития современной математики и науки в целом.**