Семенюта Н. Ф.

Решение обобщенных рекуррентных соотношений (формула Бине–Семенюты)

Исходные положения

В науке, искусстве широкое использование получили рекуррентные числовые последовательности чисел Фибоначчи, Люка и др. Они же, как простейшие числовые последовательности, более всего исследованы. В последние годы на основе последовательности Фибоначчи были также исследованы обобщенные числовые последовательности [1, 2].

Начала исследований обобщенных числовых последовательностей были положены в работе профессора М. М. Яглома при решении задачи о разрезании квадрата [3]. Обобщенные числовые последовательности лежат также в основе электрических моделей гармонических последовательностей чисел. [4, 5, 6]. Значительную роль обобщенные числовые последовательности играют также в формировании нового направления математики – математики гармонии [7].

Целью настоящей работы является исследование некоторых свойств обобщенных рекуррентных числовых последовательностей, их взаимосвязи между собой, а также решение обобщенных рекуррентных соотношений на основе последовательности Фибоначчи.

Обобщенная последовательность чисел

Числа обобщенных числовых последовательностей формируются по рекуррентному соотношению

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}. \qquad (1)$$

В зависимости от значения начальных чисел G_1 и G_2, соотношение (1) порождает бесконечное множество частных числовых последовательностей, в том числе, последовательности Фибоначчи ($G_1 = F_1 = 1$, $G_2 = F_2 = 1$) и ($G_1 = F_1 = 1$, $G_2 = F_2 = 2$), Люка ($G_1 = L_1 =1$, $G_2 = L_2 = 3$) и ($G_1 = L_1 = 2$, $G_2 = L_2 = 1$) и др.

Если обозначить $G_1 = p$ и $G_2 = q$, то обобщенная числовая последовательность (1) примет следующий вид:

$$\begin{array}{cccccccc} & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7 \ldots \\ G_n(p;q) & p, & q, & p+q, & p+2q, & 2p+3q, & 3p+5q, & 5p+8q, \ldots \end{array} \qquad (2)$$

Из (2) следует общее правило образования последовательностей обобщенных рекуррентных чисел, в основе которых лежит основная последовательность Фибоначчи:

$$G_n(p;q) = pF_{n-2} + qF_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

где $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, числа основной последовательности Фибоначчи

$F_n(1;1)$	$\dots F_{-2}$	F_{-1}	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	$F_9 \dots,$
	$\dots -1$	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34 …, (4)

Таким образом, обобщенная рекуррентная последовательность (1) состоит из двух последовательностей Фибоначчи (3), которые начинаются числами $G_1 = p$ и $G_2 = q$:

– q–последовательность с коэффициентами $q = 1, 2, 3, \dots$ и $p = 1$,

$$G_n(1;q) = F_{n-2} + qF_{n-1}, \tag{5}$$

– p–последовательность с коэффициентами $q = 1$ и $p = 1, 2, 3, \dots$

$$G_n(p;1) = pF_{n-2} + F_{n-1}. \tag{6}$$

Числа $G_1 = p$ и $G_2 = q$ своего рода гены, которые определяют значения всех последующих чисел и числовые свойства гармонических последовательностей.

Последовательности *q*–чисел. В случае целочисленных значений $G_1 = p = 1$ и $G_2 = q = 1, 2, 3, \dots$, из соотношения (5) следует:

$G_n(p;q)$			G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	$G_7 \dots,$
$G_n(1;1) = F_n(1;1)$	$p = 1$	$q = 1$	0	1	1	2	3	5	8	13 …,
$G_n(1;2)$	$p = 1$	$q = 2$	1	1	2	3	5	8	13	21…,
$G_n(1;3)$	$p = 1$	$q = 3$	2	1	3	4	7	11	18	29 …,
$G_n(1;4)$	$p = 1$	$q = 4$	3	1	4	5	9	14	23	37 …

При $q = 1$ образуется основная последовательность Фибоначчи G(1;1) = $F_n(1;1)$**,** при $q = 2$ – усеченная последовательность Фибоначчи G(1;2) = $F_n(1;2)$, при $q = 3$ – последовательность Люка G_n(1;3 = $L_n(1;3)$, при $q = 4$ последовательность $G_n(1;4)$ и т. д.

В рассмотренных случаях $G_1 = 1$ и $G_2 = q$ были целые числа и числа q–последовательностей были также целыми числами. В случае, когда $G_1 = 1$, и $G_2 = q = 1/H$, т. е. G_2 дробное число, получим последовательности:

$G_n(p;q)$	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	$G_7 \dots,$	
$G_n(1;\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}(-1$	2	1	3	4	7	1 1	18	29 …),
$G_n(1;\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}(-2$	3	1	4	5	9	14	23	37 …),
$G_n(1;\frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}(-3$	4	1	5	6	11	17	28	45 …).

Таким образом, при дробном $G_2 = q = 1/H$ обобщенная последовательность имеет вид:

$$G_n(1;1/H) \quad \frac{1}{H}\{-(H-1) \;\; H \;\; 1 \;\; H+1 \;\; H+2 \;\; 2H+3 \;\; 3H+5 \dots\}. \tag{7}$$

Последовательности в скобках (7) являются p–последовательностями чисел.

Последовательности p–чисел. В случаях целочисленных значений $G_2 = q = 1$ и $G_1 = p = 1, 2, 3, \ldots$ из соотношения (6) образуются p–последовательности:

$G_n(p;q)$			G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	$G_7 \ldots,$
$G_n(1;1) = F_n(1;1)$	$p = 1$	$q = 1$	0	1	1	2	3	5	8	13 …,
$G_n(2;1)$	$p = 2$	$q = 1$	–1	2	1	3	4	7	11	18 …,
$G_n(3;1)$	$p = 3$	$q = 1$	–2	3	1	4	5	9	14	23 …,
$G_n(4;1)$	$p = 4$	$q = 1$	–3	4	1	5	6	11	17	28 …,

В случае дробных значений $p = 1/H$:

$G_n(p;1q)$		G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	$G_5 \ldots,$
$G_n = (\frac{1}{2};1)$	$\frac{1}{2}$	(1	1	2	3	5	8 …),
$G_n = (\frac{1}{3};1)$	$\frac{1}{3}$	(2	1	3	4	7	11 …),
$G_n = (\frac{1}{4};1)$	$\frac{1}{4}$	(**3**	1	4	5	9	14 …).

Таким образом, при $p = 1/H$ и $q = 1$ образуются p–последовательности

$$G_n(1/H;1) \qquad \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{H}}\{(H–1) \quad 1 \quad H \quad H+1 \quad H+2 \quad 2H+3 \quad 3H+5 \ldots\}.$$

Последовательность Фибоначчи ($q = p = 1$) – простейшая рекуррентная последовательность, которая является линейной функцией с постоянными коэффициентами. По аналогии с гармоническими последовательностями Фурье [9], последовательность Фибоначчи является основной (первая гармоника), остальные рекуррентные (гармонические) последовательности (вторая третья, четвертая и другие гармоники) кратны целым значениям коэффициента q и p. Так, связь q чисел обобщенных q последовательностей чисел (гармоник) с $q = 2, 3, 4, \ldots$ числами последовательности Фибоначчи (первой гармоникой) с $q = 1$ определяется коэффициентом

$$\rho = \frac{F_{n-1} + qF_n}{F_{n-1} + F_n} = \frac{1+q\Phi}{1+\Phi} = \Phi^{-2} + q\Phi^{-1}. \qquad (8)$$

При этом обобщенные числа $G_n(p;q)$ связаны с последовательностью чисел Фибоначчи соотношением:

$$G_n(1;q) = \rho F_n, \qquad (9)$$

Аналогично могут быть установлены и свойства рекуррентных чисел p–последовательностей.

Таким образом, последовательности обобщенных рекуррентных чисел $G_n(1;q)$, т. е. последовательности ρF_n, являются линейными функциями чисел Фибоначчи и все свойства обобщенных рекуррентных последовательностей определяются свойствами последовательности Фибоначчи.

Решение обобщенных последовательностей

В общем случае, линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$f_{n+k} = a_1 f_{n+k-1} + a_2 f_{n+k-2} + ... + a_n f_n. \qquad (10)$$

где a_1, a_2, …, a_n – постоянные числа.

Рекуррентному соотношению чисел последовательности Фибоначчи (k = 2)

$$f_{n+2} = a_1 f_{n+1} + a_2 f_n,$$

соответствует характеристическое квадратное уравнение

$$r^2 - r - 1 = 0. \qquad (11)$$

Корнями уравнения (11) являются числа золотого сечения:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi, \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi}. \qquad (12)$$

И общее решение рекуррентного соотношения чисел Фибоначчи имеет вид:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi/\Phi)^n}{\Phi - (-1/\Phi)}, \qquad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - (-1/\Phi)^n\right]. \qquad (13)$$

Соотношения (13) получили название формул Бине, по имени французского математика Жоржа Бине (1786–1856) [7, 8].

Формула Бине для чисел Фибоначчи является также основой и для формулы обобщенной последовательности чисел. Как следует из установленной связи обобщенных последовательностей чисел с q = 2, 3, 4, … и последовательностью чисел Фибоначчи с q = 1 (13), формула Бине–Семенюты принимает следующий вид:

$$G_n = \frac{\Phi^{-2} + q\Phi^{-1}}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - (-1/\Phi)^n\right]. \qquad (14)$$

Заключение

Основным параметром, характеризующим свойства обобщенных рекуррентных последовательностей чисел, являются коэффициенты q и p. Последовательность Фибоначчи (q = p = 1) – простейшая гармоническая составляющая, которая по аналогии с гармоническими последовательностями рядов Фурье [9], является первой гармонической составляющей, остальные гармонические составляющие (вторая, третья, четвертая и др.) кратны значениям коэффициентов q и p.

Обобщенные последовательности чисел являются линейными функциями основной последовательности Фибоначчи. Из линейной связи между последовательностями чисел следует обобщенная формула типа Бине-Семенюты (14).

Формула Бине (13) явилась значительным событием на этапе развития математики гармонии [7]. Думаю, что расширение возможностей формулы Бине на более широкое множество обобщенных рекуррентных последовательностей чисел (14) (формула Бине–Семенюты) явится началом новых свойств и новых исследований в математике гармонии и ее приложениях. Так, например, числа последовательности Люка (q = 3) являются числами последовательности Фибоначчи (q = 1) умноженные на $\rho = \Phi^{-2} + 3\Phi^{-1} = \sqrt{5}$.

Литература

.

1. Семенюта Н. Ф. Обобщенные числовые последовательности типа Фибоначчи. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18140, 17.08.2013.

2. Семенюта Н. Ф. Элементы математики гармонии в теории линейных электрических цепях. Междисциплинарные исследования в науке и образовании. – 2012. – № 1; URL www.es.rae.ru/mino/62-197.

3. Яглом М. М. Как разрезать квадрат. – М.: Наука, 1968. – 112 с.

4. Семенюта Н. Ф. Электрическая модель «золотого сечения» / Проблеми гармонiї, симметрiї i золотого перетину в природi, науцi та мистецтвi. Збiрник наукових праць ВДАУ. Випуск 15. – Вiнниця: ВДАУ, 2003.

5. Семенюта Н. Ф. Электрическая модель обобщенных рекуррентных чисел и рядов // «Академия Тринитаризма»: – http://trinitas.ru /rus.doc /0232/012a /02322014 htm.12.03. 2009.

6. Семенюта Н. Ф. Электрические модели золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел / Гармоноческое развитие систем – третий путь человечества. – Одесса, ООО «Институт креативных технологий», 2011. – С. 87–94.

7. Stakhov A. The mathematics of harmoni: from Euclid to contemporary mathematics end computer science. – Singapore: Wordl Scintific, 2009. – 696 p.

8. Семенюта Н.Ф. Анализ линейных электрических цепей методом рекуррентных чисел. – Гомель: БелГУТ, 2010. – 109 с.

9. Заездный А. М. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – М.: Госэнергоиздат, 1961. – 536 с.