Н. Ф. Семенюта

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Настоящее статья является продолжением работ автора по электрическим моделям последовательностей чисел Фибоначчи [1]. Основной ее целью является показать новые свойства электрических моделей, их связи с числами Фибоначчи.

Электрическая модель последовательности чисел Фибоначчи

В работах [1, 2] было показано, что для оптимальной передачи энергии (информации) в простейшей электрической цепи «источник – приемник» (рисунок 1) необходимо выполнить условие

$$R_г = R_н \tag{1}$$

При этом мощность, потребляемая сопротивлением нагрузки $R_н$, будет максимальной, а мощности, теряемые на сопротивлении $R_г$ источника и сопротивлении нагрузки $R_н$ будут равны.

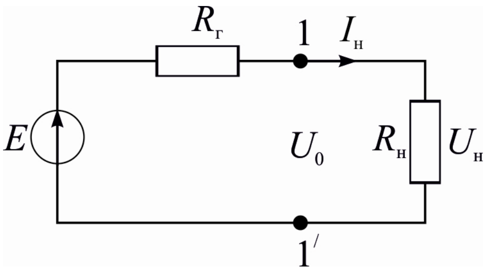

Рисунок 1 – Электрическая цепь «источник – нагрузка»

При передаче энергии к нагрузке через составной (проходной) четырехполюсник (один или несколько автономных четырехполюсников), т. е. электрическую цепь «источник – проходной четырехполюсник – приемник», источник нагружен на входное сопротивление составного четырехполюсника (рисунок 2). Входное сопротивление в такой цепи зависит от сопротивлений R_1 и R_2, числа автономных четырехполюсников и нагрузки составного четырехполюсника $R_н$.

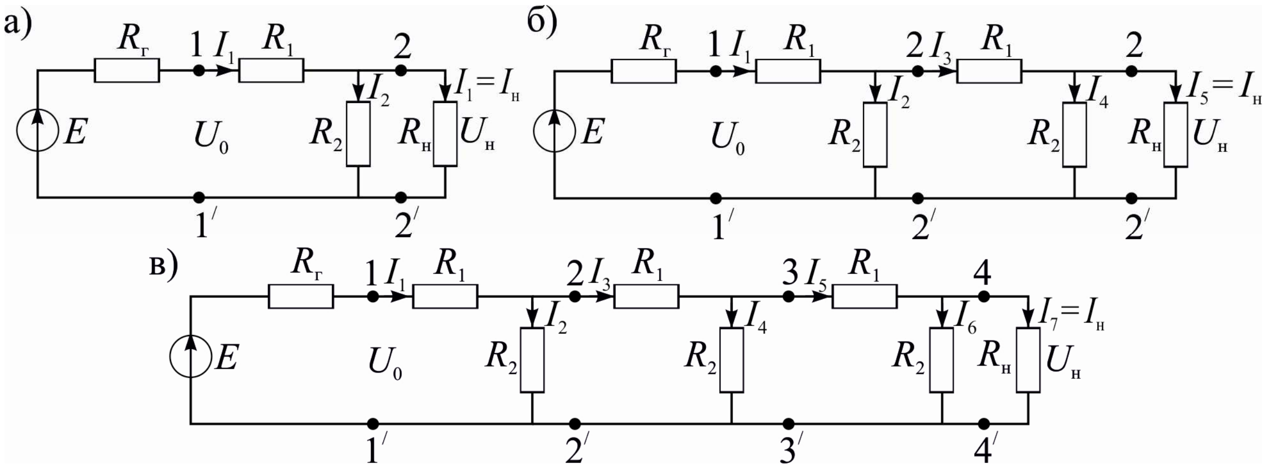

Рисунок 2 – Электрическая модель «источник – проходной четырехполюсник – нагрузка» последовательности чисел Фибоначчи

Как было показано в работах [1, 2], только при одном, характерном для данного проходного четырехполюсника сопротивлении нагрузки, входное сопротивление $R_{вх}$ будет равно сопротивлению нагрузки $R_н$. Причем это равенство $R_{вх} = R_н$ будет выполняться при любом числе однородных четырехполюсников в цепи. Это удивительное сопротивление получило название характеристического (согласованного) сопротивления $R_х$ при котором сохраняется оптимальная передача энергии к нагрузке. Оно же является «золотым» сопротивлением для данного конкретного четырехполюсника только с параметрами R_1 и R_2.

Для проходного четырехполюсника электрических моделей последовательности чисел Фибоначчи, у которых $R_1 = 1$ и $R_2 = 1$ значение характеристического сопротивления определяется из квадратного уравнения

$$R_x^2 - R_x - 1 = 0,$$

корни которого, равны

$$R_{x_{1,2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}.$$

Согласованное («золотое») сопротивление при этом равно вещественному корню уравнения

$$R_x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi = 1{,}618\ .$$

Токи согласованной электрической модели последовательности чисел Фибоначчи

Токи (напряжения) электрической модели последовательности чисел Фибоначчи (см. рисунок 2), состоящие из конечного числа простейших четырехполюсников
(n = 1, 2, 3) с сопротивлениями $R_1 = R_2 = 1$ и согласованной нагрузкой $R_н = Φ$ = = 1,618 приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Токи и напряжения электрической модели чисел Фибоначчи

Общее число звеньев	Токи (напряжения) звеньев						
	n = 1		n = 2		n = 3		
	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
1	F_3/F_4	F_2/F_4	F_1/F_4	–	–	–	–
2	F_5/F_6	F_4/F_6	F_3/F_6	F_2/F_6	F_1/F_6	–	–
3	F_7/F_8	F_6/F_8	F_5/F_8	F_4/F_8	F_3/F_8	F_2/F_8	F_1/F_8

Если на вход цепи подать напряжение $U_0 = F_{2n+1}$, то токи (напряжения) в продольных и поперечных ветвях будут точно соответствовать числам Фибоначчи: F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7.

Токи лестничные цепи полностью отражают свойства последовательностей чисел Фибоначчи (суммы первых n чисел, суммы квадратов первых n чисел, сумма квадратов первых n чисел и др.).

Геометрические модели последовательности чисел Фибоначчи

В случае непосредственного соединения источника и нагрузки (см. рисунок 1) баланс мощностей потребляемой согласованной нагрузкой (приемником) и теряемой в источнике можно представить в виде прямоугольника – так называемого двойного квадрата с отношением сторон 2 : 1(рисунок 3).

Рисунок 3 – Двойной квадрат мощности электрической цепи «источник–нагрузка»

Один квадрат соответствует максимальной (оптимальной) мощности потребляемой нагрузкой (приемником) при условии $R_н = R_г$, второй – мощности теряемой на внутреннем сопротивлении источника $R_г$.

В случае соединения источника и нагрузки через проходной (промежуточный) четырехполюсник (см. рисунок 2, *а*) для передачи максимальной энергии сигнала к приемнику условие $R_г = R_н$ остается в силе, но его выполнение связано с появлением проходного четырехполюсника. В случае согласованной нагрузки $R_н = Ф$, $R_{вх} = R_н = Ф$ и $R_г = R_н = Ф$ и условия оптимальной передачи энергии от источника к нагрузке через проходной четырехполюсник выполняются.

Полученный результат представим в виде геометрической модели согласованной цепи. В случае непосредственного соединения нагрузки с источником (рисунок 2, *а*), площади нагрузки и источника составляют квадраты $F_1 = 1^2$ и $F_2 = 1^2$ и общая мощность (общая площадь), потребляемая цепью равна: $S_1 = F_1^2 + F_2^2 = F_2 F_3 = 2$.

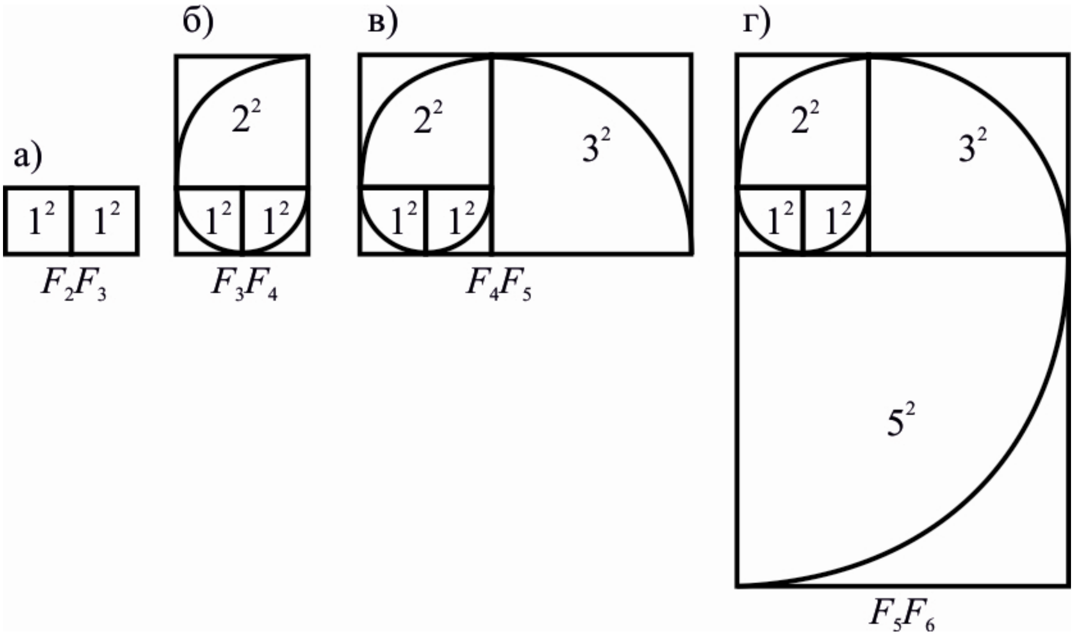

Рисунок 4 – Модель «роста» прямоугольников геометрической модели последовательности чисел Фибоначчи

В случае соединения нагрузки через один проходной четырехполюсник к двойному квадрату добавляется квадрат $F_3 = 2^2$ (рисунок 2, *б*) и общая потребляемая мощность возрастает до $S_2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_3 F_4 = 6$. Включение в цепь еще одного четырехполюсника эквивалентно добавке в геометрическую модель еще одного квадрата площадью $F_4 = 3^2$ (рисунок 2, *в*). При этом общая потребляемая мощность возрастет до величины $S_3 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = F_4 F_5 = 15$. Дальнейшее увеличение четырехполюсников в цепи будет соответствовать добавлению квадрата $F_5 = 5^2$ (рисунок 2, *г*) и увеличению потребляемой цепь мощности $S_4 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = F_5 F_6 = 40$. и т. д.

Полученной геометрической модели последовательности чисел Фибоначчи соответствует и логарифмическая спираль, часто называемая спиралью Фибоначчи.

Заключение

Таким образом, на основе электрических моделей последовательностей рекуррентных чисел получены адекватные им геометрические модели последовательности чисел Фибоначчи и логарифмическая спираль Фибоначчи. И здесь необходимо обратить внимание, что по мере «роста» числа квадратов, корень квадратный из отношений площадей (мощностей) полученных прямоугольников все больше приближается к характеристическому сопротивлению и так называемому золотому прямоугольнику с отношением сторон равным золотому сечению Ф = 1,618…

$$S_n / S_{n-1} = R_x = \sqrt{F_{n+2} / F_n} \to \Phi.$$

И еще. Геометрическая модель подобная приведенной на рисунке 4 была получена при решении задачи о разрезании квадрата в работе профессора И. М. Яглома [3].

Литература

1. Семенюта Н. Ф. О «золотых» режимах работы электрических моделей числовых последовательностей типа Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.19727, 05.11.2014.
2. Семенюта, Н. Ф. Математика гармонии: новый взгляд на «золотое» сечение / Н. Ф. Семенюта // Междисциплинарные исследования в науке и образовании. – 2014. – № 3 Kg; URL: www.es.rae.ru/mino/173-1446
3. Яглом И. М. Как разрезать квадрат? (Математическая библиотека). – М.: Наука, 1968. – 87 с.