Виктор Григорьевич Соловьёв

ТЕОРЕМА О ЗОЛОТОМ СЕЧЕНИИ

ПРАКТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

<u>Москва</u>

<u>Сентябрь 2016</u>

Аннотация

Обычно исследователи Золотого сечения посвящают свои работы поиску и объяснению его свойств в многочисленных явлениях живой и неживой природы, а также в произведениях искусства - живописи, архитектуре, литературе, музыке. Решая математическую задачу о сфере и касательной к ней наклонной плоскости, автору удалось сформулировать и доказать теорему о новом свойстве правильной пирамиды с точки зрения практического смысла, изначально руководствуясь которым можно обосновать принципы золотой пропорции.

Введение в теорему

На тему Золотого Сечения опубликовано огромное количество трудов, только перечень которых занял бы не один увесистый том, поэтому нет никакого смысла в дополнительном описании свойств Золотого Сечения и тем более ссылаться на список литературы - слишком все известно и популярно.

Всех исследователей Золотого Сечения объединяет общее обстоятельство: поиск закономерностей и объяснение причин появления золотых пропорций в том или ином явлении живой и неживой природы, а также в произведениях искусства - живописи, архитектуре, литературе, музыке. Суть такого подхода состоит в том, что, пользуясь знанием о Золотом Сечении, можно взять практически любой материальный и нематериальный (даже виртуальный) объект и путем определенных математических ухищрений (в хорошем смысле) отыскать в нем золотую пропорцию.

Поставим, редко встречающийся в многочисленных работах, вопрос в обратной последовательности. Для этого представим ситуацию, что мы будто не знаем ничего о золотой пропорции, но перед нами сформулирована задача найти практическое решение при создании какого-нибудь объекта, исходя из принципов минимизации средств, времени, работы и т.п.. Может ли практический смысл, положенный в основу указанной выше задачи привести к Золотому Сечению, тем самым подтвердив практическую природную сущность золотой пропорции. Оказывается, что такое решение имеется и изложено в нижеследующей теореме.

Теорема

Апофема правильной пирамиды, описанной вокруг шара произвольного радиуса, минимальна, если углы наклона боковых граней пирамиды равны углу Золотого Сечения

Для примера рассмотрим правильную четырехгранную пирамиду (Рисунок 1) с боковыми гранями FBE, DBF, CBD, EBC, основанием CDFE и высотой BH. Апофема (AB) - высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины. Угол золотого сечения (HAB) - острый угол прямоугольного треугольника, при котором отношение катета (AH) к гипотенузе (AB) равно золотому числу Фи. В данном случае HAB - угол наклона боковой грани (FBE) пирамиды.

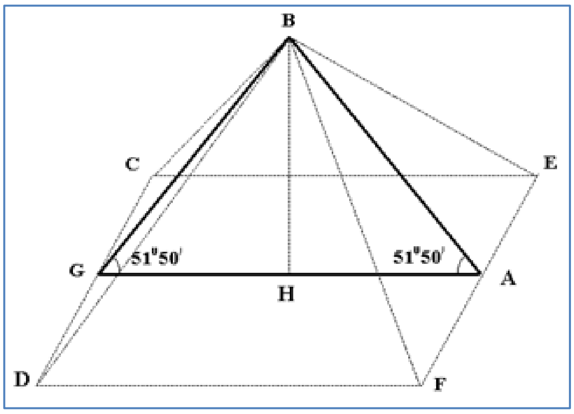
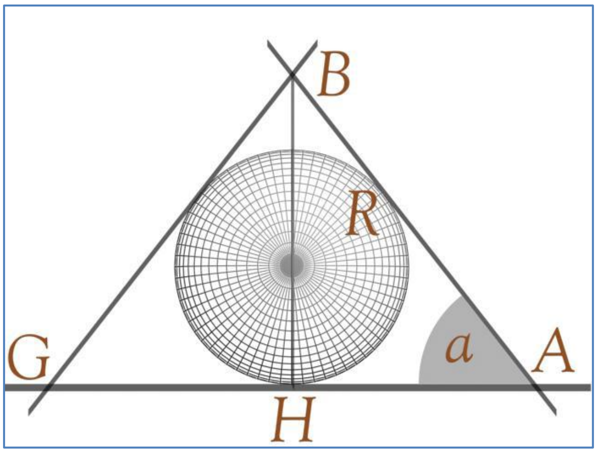


Рисунок 1

Для доказательства теоремы и поиска решения задачи геометрические построения удобно рассматривать в проекции главной плоскости, проходящей через центр шара, перпендикулярно обеим плоскостям (Рисунок 2). Пусть на горизонтальной плоскости **G-A** покоится шар радиуса **R**. Проведем вертикаль **H-B** через центр шара **R** и



касательную к шару наклонную плоскость **A-B**, которая пересекается с вертикальной плоскостью **H-B** в точке **B** и с горизонтальной плоскостью **G-A** в точке **A**, образуя с ней угол наклона ∝. При изменении угла наклона касательной плоскости **A-B** изменятся точки пересечений соответствующих плоскостей **A** и **B**. Задача состоит в том, чтобы найти такой угол наклона ∝, при котором отрезок **AB** был бы **минимальным** для заданного шара радиуса **R**.

Приведем краткое математическое решение. Формулу для отрезка **AB** в зависимости от радиуса **R** можно представить в виде

Рисунок 2

$$AB = \left(\operatorname{tg} \propto + \operatorname{ctg}\frac{\propto}{2}\right) \times R$$

(1) Найдем экстремум функции (1), приравняв к нулю её производную

$$AB' = \left(\cos^{-2} \propto - \sin^{-2}\frac{\propto}{2}\right) \times R \qquad (2)$$

что приведет, результате относительно несложных преобразований, к уравнению

$$\sec^2 \propto - \sec \propto - 1 = 0 \qquad (3)$$

Выразив через

$$t = \sec \propto \qquad (4)$$

получим, так называемое, уравнение золотого сечения (!)

$$t^2 - t - 1 = 0 \qquad (5)$$

положительным корнем которого является известное число ‘Φ’

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618 \ldots \qquad (6)$$

Тогда искомый угол наклона окажется равным

$$\propto = \arccos \Phi^{-1} \approx 51°49'38'' \qquad (7)$$

Соответственно, вторая производная функции (1) выразится соотношением

$$AB'' = (2 \times tg \propto \times \sec^2 \propto + 0.5 \times \csc^2 \propto) \times R \qquad (8)$$

Очевидно, что при полученном значении ∝= Φ функция (8) больше нуля. Это означает, что наклонный отрезок **AB** наименьший!

Прямоугольный треугольник **ABH** является также золотым, в котором отношение одного катета (**BH)** к другому (**AH)** равно отношению последнего (**AH)** к гипотенузе (**AB)** и численно равно $\sqrt{\Phi} \approx 1.272 \ldots$

Теорема доказана. Аналогичные рассуждения и доказательство можно отнести не только к пирамиде, но и к конусу, образующая которого является той же гипотенузой золотого треугольника.

Именно такой прямоугольный треугольник лежит в основе **Золотой Пирамиды (Золотого Конуса)**, гипотенуза которого является апофемой пирамиды (или образующей для конуса). Тогда все соотношения и пропорции Золотой Пирамиды (с четырьмя боковыми гранями) можно выразить явным образом через радиус вписанного шара **R** и Золотое число **Φ**, основные из которых отображены в таблице 1:

Таблица 1

	Параметры и пропорции Золотой Пирамиды	Формула для расчета параметров	Численное значение* **При R = 1**
	Высота	$(1+\Phi)R$	2.618034
	Апофема	$(1+\Phi)\sqrt{\Phi}\,R$	3.330191
	Ребро основания	$2\Phi\sqrt{\Phi}\,R$	4.116342
	Боковое ребро	$\sqrt{4+7\Phi}\ R$	3.914874
	Площадь боковой грани	$(2+3\Phi)\ R$	6.854102
	Площадь боковой поверхности	$4(2+3\Phi)\ R$	27.416408
	Площадь основания	$4(1+2\Phi)R$	16.944272
	Площадь центрального сечения	$(1+2\Phi)\sqrt{\Phi}\,R$	5.388362
	Площадь диагонального сечения	$\sqrt{2}(1+2\Phi)\sqrt{\Phi}\,R$	7.620295
	Угол наклона боковой грани	$arccos\,\Phi^{-1}$	$51°49'38''$
	Угол наклона бокового ребра	$arc\mathrm{tg}\sqrt{\Phi/2}$	$41°58'12''$
	Отношение площади боковой поверхности к площади основания	$\sqrt{\Phi}$	1.272020
	Отношение площади боковой грани к квадрату высоты	$4\sqrt{\Phi^{-1}}$	3.144606
	Отношение периметра основания к удвоенной высоте	$4\sqrt{\Phi^{-1}}$	3.144606
	Отношение радиуса окружности, длина которой равна периметру основания, к высоте пирамиды	$4\sqrt{\Phi^{-1}}\ /\pi$	1.000959
	Объем пирамиды	$4(5\Phi+3)R^3/3$	14.786893
	Отношение объема пирамиды к объему вписанного шара	$(5\Phi+3)/\ \pi$	4.706814

*Числовые данные в таблице 1 приведены с точностью до 6-го знака после запятой

Таким образом, Золотое Сечение проявляет важное практическое свойство:

минимизация расстояния при перемещении вдоль него грузов неизбежно приводит к экономии затрат времени и силы, а следовательно, и работы, при этом, если речь идет о перемещениях по наклонной плоскости или прямой, опирающейся на шар, то плоскость или прямую следует наклонить под углом Золотого Сечения.