Алексей Стахов

Обобщенная формула Кассини: сколько существует целочисленных рекуррентных последовательностей, которые удовлетворяют этой формуле?

Содержание

1.Связь чисел Фибоначчи с элементарной теорией чисел и комбинаторикой

Числа Фибоначчи и элементарная теория чисел. Согласно Википедии [1], *«в **элементарной теории чисел** целые числа изучаются без использования методов других разделов математики. Такие вопросы, как делимость целых чисел, алгоритм Евклида..., разложение числа на простые множители, теория сравнений, диофантовы уравнения, построение магических квадратов, совершенные числа, **числа Фибоначчи**, малая теорема Ферма, теорема Эйлера, задача о четырёх кубах, относятся к этому разделу».*

Наиболее исследованной целочисленной последовательностью являются ***натуральные числа***, которые изучаются с древнегреческого периода. Как подчеркивается в [1], "*весомый вклад в становление теории чисел оказали пифагорейцы, Евклид и Диофант. Пифагорейцы рассматривали только **целые положительные числа и полагали число собранием единиц**. Единицы были неделимы и располагались в виде правильных геометрических тел».*

Пифагорейцы изучали свойства ***«фигурных»*** («треугольных», «квадратных» и других), ***«совершенных», чётных и нечётных, простых и составных чисел***.

Некоторые свойства чисел Фибоначчи и Люка. Как следует из вышеизложенного, ***числа Фибоначчи*** являются существенной частью элементарной теории чисел и поставлены в один ряд с такими выдающимися математическими результатами как *делимость целых чисел, алгоритм Евклида, теория сравнений, диофантовы уравнения, магические квадраты, совершенные числа, малая теорема Ферма, теорема Эйлера, задача о четырёх кубах*.

Наиболее известными числовыми последовательностями, изучаемыми в теории чисел Фибоначчи [2-6], являются: ***последовательность Фибоначчи*** или классические ***числа Фибоначчи***

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,..., \quad (1)$$

задаваемые рекуррентным соотношением:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2};\ F_1 = F_2 = 1. \quad (2)$$

и ***последовательность Люка*** или классические ***числа Люка***

$$2,1,3,4,7,11,18,29,47,.., \quad (3)$$

задаваемые рекуррентным соотношением:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2};\quad L_1 = 1,\ L_2 = 3. \quad (4)$$

Числа Фибоначчи и Люка могут быть «расширены» в сторону отрицательных значений индекса n.

Таблица 1. Расширенные числа Фибоначчи и Люка

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
L_{-n}	2	1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76	123

Как следует из Табл. 1, «расширенные» числа Фибоначчи F_{-n}, F_n и «расширенные» числа Люка L_{-n}, L_n связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n,\ L_{-n} = (-1)^n L_n. \qquad (5)$$

Согласно Табл.1 «расширенные» числа Фибоначчи и Люка представлят собой две последовательности, которые принимают целочисленные значения в пределах от

- ∞ до +∞. При этом с учетом (5) они обладают своеобразной «симметрией» относительно нулевых значений этих последователностей F_0, L_0.

«Тайна» треугольника Паскаля. Во второй половине 20-го века была обнаружена одна «тайна» широко известного ***треугольника Паскаля*** – его связь с числами Фибоначчи. Считается, что первым раскрыл эту «тайну» известный венгерский, швейцарский и американский математик и популяризатор науки Джордж Пойа (1887-1985). В 1940 г. он переехал в США. Живя в США, Пойа много работал со школьными учителями математики и внёс большой вклад в популяризацию науки и математики. Он написал несколько книг о том, как люди решают задачи и как надо учить решать задачи.

В книге «Математическое открытие» [7] в виде упражнения Пойа описал способ получения так называемых «диагональных сумм» треугольника Паскаля, которые приводят к числам Фибоначчи (Рис.1).

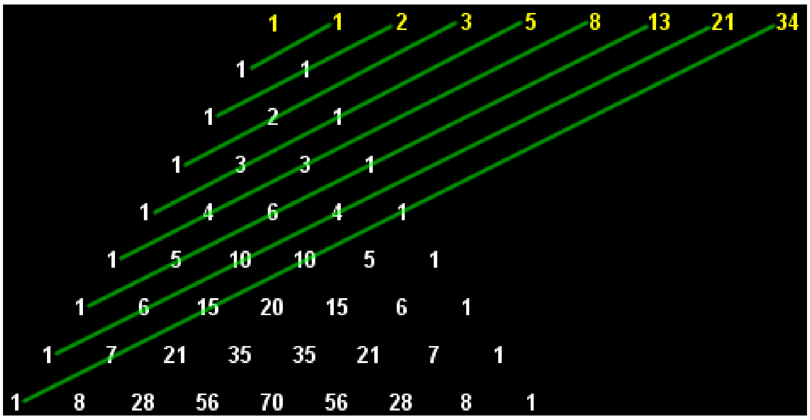

Рисунок 1. Диагональные суммы треугольника Паскаля

Следует отметить, что этот предельно простой математический результат, который, как говорится, «лежал на поверхности», в течение нескольких столетий оставался «тайной» как для Блеза Паскаля, так и для других математиков, которые соприкасались с треугольником Паскаля и числами Фибоначчи. Важно подчеркнуть, что из Рис.1 вытекает фундаментальная связь чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля – главным математичским объектом комбинаторики, то есть, числа Фибоначчи могут быть по праву отнесены не только к элементарной теории чисел, но и к комбинаторике, что может способствовать дальнейшему развитию комбинаторики. То есть, **числа Фибоначчи являются своеобразным связующм звеном между элементарной теорией чисел и комбинаторикой**.

Немного истории. Глубокое изучение чисел Фибоначчи и Люка начинается с 19 в. и наибольший вклад в их изучение внесли известные французские математики **Франсуа Эдуард Анатоль Люка** (1842 - 1891) и **Жак Филипп Мари Бине́** (1786 - 1856)

Именно их математические результаты в этой области (***формулы Бине*** и ***последовательности Люка*** [8]) считаются той «стартовой площадкой», с которой началось развитие ***теории чисел Фибоначчи*** в современной науке (Фибоначчи-ассоциация, Славянская «золотая» группа и т.д.) и которые привели к новейшим достижениям в этой области (***алгоритмическая теория измерения*** [9], ***Математика Гармонии*** [10], ***гиперболические функции***

Фибоначчи и Люка [11,12], ***геометрия Боднара*** [13], ***λ-числа Фибоначчи и Люка*** [14-22], ***формулы Газале*** [15], ***"металлические» пропорции Веры Шпинадель*** [14], ***диагональные суммы треугольника Паскаля*** [8], ***структурная гармония систем Эдуарда Сороко*** [23], ***система счисления Бергмана*** [24], ***p-коды Фибоначчи*** [9], ***коды золотой p-пропорции*** [25], ***троичная зеркально-симметричная арифметика*** [26], ***решение 4-й проблемы Гильберта*** [27], ***«золотая» теория чисел*** [28] и, наконец, ***«золотая» не-Евклидова геометрия*** [29]).

Детальное изложение всех указанных направлений развития и приложений теории чисел Фибоначчи и Математики Гармонии не входит в задачу этой статьи, посвященной описанию только одного неожиданного результата – ***обобщению формулы Кассини*** [30], который представляет исторический и теоретико-числовой интерес.

2. Что такое формула Кассини?

Джованни Кассини. Кассини – это знаменитая династия французских астрономов. Наиболее известным из них считается основатель этой династии Джованни Доменико Кассини (1625-1712). Признанием его выдающихся заслуг в области астрономии являются следующие факты. Именем Джованни Кассини названы многие астрономические объекты: «Кратер Кассини» на Луне, «Кратер Кассини» на Марсе, «Щель Кассини» - промежуток в кольцах Сатурна, «Законы Кассини» - три открытые Кассини законы движения Луны. Именем Кассини-Гюйгенса назван космический аппарат, созданный совместно НАСА, Европейским космическим агентством и Итальянским космическим агентством, целью которого является изучение планеты Сатурн и её колец и спутников. Аппарат состоял из двух основных компонент: непосредственно самой станции Кассини Орбитер и спускаемого зонда Гюйгенс, который был отделён от станции и спустился на поверхность спутника Сатурна Титан. Кассини-Гюйгенс был запущен 15 октября 1997 и достиг системы Сатурна 1 июля 2004. Это первый искусственный спутник Сатурна.

Вклад Кассини в развитие теории чисел Фибоначчи (формула Кассини). Но оказывается имя Кассини широко известно не только в астрономии, но и в математике. История науки умалчивает, почему Кассини увлекся числами Фибоначчи. Скорее всего, это было просто «хобби» великого астронома. В то время многие серьезные ученые увлекались числами Фибоначчи и золотым сечением. Напомним, что эти математические объекты были также увлечением Иоганна Кеплера, современника Кассини.

Кассини первым обратил внимание на следующую закономерность, связывающую соседние числа Фибоначчи. Если мы возьмем произвольное число Фибоначчи, например, $F_5 = 5$ и возведем его в квадрат, то получим следующий результат: $5^2 = 25$. А теперь сравним этот результат с произведением двух соседних чисел Фибоначчи $F_4 = 3$ и $F_6 = 8$, которые окружают число $F_5 = 5$, то есть, $3\times 8 = 24$. Мы обнаруживаем, что сравниваемые числа отличаются на 1, то есть,

$$5^2 - 3\times 8 = 1.$$

Проделаем то же самое с «тройкой» следующих чисел Фибоначчи $5, 8, 13$, то есть, сначала возведем среднее число Фибоначчи $F_6 = 8$ в квадрат ($8^2 = 64$), после чего сравним этот результат с произведением двух соседних к 8 чисел Фибоначчи 5 и 13 ($5\times 13 = 65$), которые окружают число 8. К нашему удивлению, мы обнаруживаем, что сравниваемые числа тоже отличаются на 1, то есть,

$$8^2 - 5\times 13 = -1.$$

При этом, однако, полученная разность равна 1, взятой с отрицательным знаком.

Далее имеем: $13^2 - 8\times 21 = 1;\quad 21^2 - 13\times 34 = -1$ и т.д.

В результате этих элементарных рассуждений Кассини обнаружил удивительную закономерность, которую можно сформулировать так:

"Квадрат некоторого числа Фибоначчи F_n всегда отличается от произведения двух соседних чисел Фибоначчи F_{n-1} и F_{n+1}, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы

зависит от индекса n числа Фибоначчи F_n; если индекс n является четным числом, то число 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом".

Указанное свойство чисел Фибоначчи можно выразить в виде следующей общей математической формулы, называемой **формулой Кассини**:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}, \tag{6}$$

которая справедлива для любого целого $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

Для доказательства формулы Кассини (6) воспользуемся методом индукции по n. При $n=1$ числа Фибоначчи F_{n-1}, F_n, F_{n+1} в формуле (6) принимают следующие значения $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1$, откуда вытекает справедливость тождества (6) для случая $n=1$:

$$(1)^2 - 0 \times 1 = (1)^2. \tag{7}$$

Основание индукции доказано.

Сделаем индуктивное предположение. Предположим, что тождество (6) справедливо для любого заданного целого n и докажем, что из этого индуктивного предположения вытекает его справедливость и для целого $n+1$.

Докажем, что, если выполняется тождество (6), то тождество

$$F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^{n+2} \tag{8}$$

также выполняется. Для этого представим левую часть тождества (9) в виде:

$$\begin{aligned} &F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 - F_n\left(F_n + F_{n+1}\right) = F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_n F_{n+1} = \\ &F_{n+1}\left(F_{n+1} - F_n\right) - F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 \end{aligned}. \tag{9}$$

Используя (8), мы можем записать:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}, \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

В заключение отметим эстетический аспект формулы Кассини (6), как впрочем и других тождеств для чисел Фибоначчи. Формула (6) вызывает благоговейный трепет, если представить себе, что она справедлива для любого значения n (поскольку индекс n может принимать любое целочисленное значение в пределах от -∞ до +∞), и истинное эстетическое наслаждение, потому что чередование +1 и –1 в указанном выше математическом выражении при последовательном прохождении всех чисел Фибоначчи от -∞ до +∞ вызывает неосознанное чувство ритма и гармонии.

До сих пор считалось, что «формуле Кассини» (6) удовлетворяет только одна рекуррентная числовая последовательность – числа Фибоначчи. Докажем, что это не так.

3. Лямбда-числа Фибоначчи и обобщенная формула Кассини

Еще немного истории. Современная «математика гармонии» [10] является активно развивающимся направлением современной науки и математики. В конце 20-го и начале 21-го вв. сразу несколько исследователей из разных стран – аргентинский математик Вера Шпинадель [14], французский математик египетского происхождения Мидхат Газале [16], американский математик Джей Каппрафф [16], российский исследователь Александр Татаренко [17], армянский философ и физик Грант Аракелян [18], российский исследователь Виктор Шенягин [19], украинский физик Николай Косинов [20], украинско-канадский исследователь Алексей Стахов [21], испанские математики Falcon Sergio, Plaza Angel [22] и др. независимо друг от друга начали изучать новый класс рекуррентных числовых последовательностей, которые являются обобщением классических чисел Фибоначчи. Эти числовые последовательности, названные λ-числами Фибоначчи, привели к открытию нового класса математических констант, названных аргентинским математиком Верой Шпиналель «металлическими пропорциями» [14]. Количество металлических пропорций теоретически бесконечно, а их частным случаем является классическая золотая пропорция. В книге

Мидхата Газале [15], а позже в работе Алексея Стахова [21] были введены так называемые **«формулы Газале»**, которые задают аналитическое выражение для λ-чисел Фибоначчи и λ-чисел Люка через металлические пропорции. С использованием формул Газале Алексей Стахов в 2006 г. разработал гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка [21]. Используя эти функции, Алексей Стахов и Самуил Арансон пришли к оригинальному решению 4-й проблемы Гильберта [27].

Интерес большого количества исследователей из разных стран (США, Аргентина, Франция, Россия, Армения, Украина) к λ-числам Фибоначчи и Люка не может быть случайным. Это означает, что «проблема созрела». И ученые разных стран начали ее изучать независимо друг от друга.

Рекуррентное соотношение для λ-чисел Фибоначчи. Зададимся целым числом $\lambda > 0$ и рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \; F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1 \tag{11}$$

Рекуррентное соотношение (11) «генерирует» бесконечное количество новых числовых последовательностей, так как каждому $\lambda > 0$ соответствует своя числовая последовательность. Важно подчеркнуть, что их частными случаями являются некоторые числовые последовательности, получившие широкую известность в современной науке.

В частности, для случая $\lambda = 1$ рекуррентное соотношение (11) сводится к рекуррентному соотношению

$$F_1(n+2) = F_1(n+1) + F_1(n); \quad F_1(0) = 0, F_1(1) = 1, \tag{12}$$

которое задает классические числа Фибоначчи (1). Основываясь на этом факте, числовые последовательности, генерируемые рекуррентным соотношением (11), были названы λ-числами Фибоначчи [21,27].

При $\lambda = 2$ рекуррентное соотношение (11) сводится к рекуррентному соотношению

$$F_2(n+2) = 2F_2(n+1) + F_2(n); \quad F_2(0) = 0, F_2(1) = 1, \tag{13}$$

которое задает так называемые числа Пелля: $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \ldots$

При $\lambda = 3, 4$ рекуррентное соотношение (11) сводится к следующим рекуррентным соотношениям:

$$F_3(n+2) = 3F_3(n+1) + F_3(n); \quad F_3(0) = 0, F_3(1) = 1 \tag{14}$$

$$F_4(n+2) = 4F_4(n+1) + F_4(n); \quad F_2(0) = 0, F_2(1) = 1. \tag{15}$$

Лямбда-числа Фибоначчи обладают многими замечательными свойствами, аналогичными свойствам классических чисел Фибоначчи. Доказано, что λ-числа Фибоначчи так же, как классические числа Фибоначчи, могут быть «расширены» в сторону отрицательных значений дискретной переменной n.

В Табл.2 приведены четыре расширенные последовательности λ-чисел Фибоначчи, соответствующие значениям $\lambda = 1, 2, 3, 4$.

Таблица 2. Расширенные λ-числа Фибоначчи ($\lambda = 1, 2, 3, 4$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21
$F_1(-n)$	0	1	–1	2	–3	5	–8	13	–21
$F_2(n)$	0	1	2	5	12	29	70	169	408
$F_2(-n)$	0	1	–2	5	–12	29	–70	169	–408
$F_3(n)$	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927
$F_3(-n)$	0	1	–3	10	–33	109	–360	1199	–3927
$F_4(n)$	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184
$F_4(-n)$	0	1	–4	17	–72	305	–1292	5473	–23184

Обобщение формулы Кассини для λ-чисел Фибоначчи. Напомним, что формула Кассини (6), связывающая три соседних числа Фибоначчи F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, является одним из наиболее удивительных тождеств для классических чисел Фибоначчи.

Оказывается, что такое свойство присуще и λ-числам Фибоначчи и имеет тот же вид:

$$F_\lambda^2(n) - F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1) = (-1)^{n+1}, \tag{16}$$

где $F_\lambda(n-1), F_\lambda(n), F_\lambda(n+1)$ - соседние λ-числа Фибоначчи.

Докажем свойство (16) индукцией по n. При $n=1$ λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n-1), F_\lambda(n), F_\lambda(n+1)$ в формуле (16) согласно (11) принимают следующие значения: $F_\lambda(0)=0, F_\lambda(1)=1, F_\lambda(2)=\lambda$, откуда вытекает справедливость тождества (16) для случая $n=1$:

$$(1)^2 - 0\times 1 = (1)^2. \tag{17}$$

Основание индукции доказано.

Сделаем следующее индуктивное предположение. Предположим, что тождество (16) справедливо для любого заданного целого n и докажем, что из этого индуктивного предположения вытекает его справдливость и для целого $n+1$.

Докажем, что, если выполняется тождество (16) для заданного целого n, то есть, тождество

$$F_\lambda^2(n+1) - F_\lambda(n)F_\lambda(n+2) = (-1)^{n+2} \tag{18}$$

также выполняется.

Для этого представим левую часть тождества (18) в виде:

$$\begin{gathered} F_\lambda^2(n+1) - F_\lambda(n)F_\lambda(n+2) = F_\lambda^2(n+1) - F_\lambda(n)\left[F_\lambda(n) + \lambda F_\lambda(n+1)\right] = \\ F_\lambda^2(n+1) - F_\lambda^2(n) - \lambda F_\lambda(n)F_\lambda(n+1) = F_\lambda(n+1)\left[F_\lambda(n+1) - \lambda F_\lambda(n)\right] = \\ F_\lambda(n+1)F_\lambda(n-1) - F_\lambda^2(n) = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}, \end{gathered} \tag{19}$$

что и следовало доказать.

Приведем примеры выполнения тождества (11) для различных последовательностей, приведенных в Табл.2. Для $F_2(n)-$последовательности тождество (11) проверим для случая n=7. Для этого случая мы должны рассмотреть следующую тройку чисел, выбранную из Табл.2: $F_2(6)=70, F_2(7)=169, F_2(8)=408$. Произведя вычисления над ними согласно (11), получим следующий результат:

$$(169)^2 - 70\times 408 = 28561 - 28560 = 1,$$

что соответствует тождеству (11), поскольку $(-1)^{n+1} = (-1)^8 = 1$.

Теперь рассмотрим $F_3(n)-$последовательность из Табл.2 для случая $n=6$. Для этого случая мы должны рассмотреть следующую тройку чисел:

$$F_3(5)=109, F_3(6)=360, F_3(7)=1189.$$

Произведя вычисления над ними согласно (11), получим следующий результат:

$$(360)^2 - 109\times 1189 = 129600 - 129601 = -1,$$

что соответствует тождеству (11), поскольку $(-1)^{n+1} = (-1)^7 = -1$.

Наконец, рассмотрим $F_4(-n)$ – последовательность из Табл.2 для случая отрицательного $n = -5$. Для этого случая мы должны рассмотреть следующую тройку чисел:

$$F_4(-4) = -72,\ F_4(-5) = 305,\ F_4(-6) = -1292.$$

Произведя вычисления над ними согласно (11), получим следующий результат:

$$(305)^2 - (-72) \times (-1292) = 93025 - 93024 = 1,$$

что соответствует тождеству (11), поскольку $(-1)^{n+1} = (-1)^{-4} = 1$.

Таким образом, изучая обобщенную формулу Кассини (16) для λ-чисел Фибоначчи, мы пришли к открытию бесконечного количества целочисленных рекуррентных последовательностей, простирающихся от $+\infty$ до $-\infty$, обладающих уникальным математическим свойством, выражаемым обобщенной формулой Кассини (11), которая гласит следующее:

Квадрат некоторого λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ всегда отличается от произведения двух соседних λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n-1)$ и $F_\lambda(n+1)$, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от четности числа *n*; если число *n* является четным числом, то 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом.

Таким образом, в результате не очень сложных математических рассуждений мы установили далеко не тривиальный математический результат. Оказывается, что для любого заданного целого $\lambda > 0$ последовательность λ-чисел Фибоначчи, задаваемых рекуррентным соотношением (11), обладает замечательным математическим свойством (16), которое является обобщением формулы Кассини (6), справедливой для классических чисел Фибоначчи.

А поскольку множество целых чисел $\lambda > 0$ совпадает с множеством натуральных чисел, количество которых бесконечно, то отсюда вытекает ответ на вопрос, поставленный в названии настоящей статьи:

1. Количество рекуррентных целочисленных последовательностей, удовлетворяющих «обобщенной формуле Кассини», бесконечно.

2. Повидмому, существование в множестве целых чисел бесконечного количества целочисленных последовательностей, обладающих таким уникальным свойством, является сюрпризом для многих экспертов в области теории чисел.

Литература

1. Теория чисел. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB#.D0.AD.D0.BB.D0.B5.D0.BC.D0.B5.D0.BD.D1.82.D0.B0.D1.80.D0.BD.D0.B0.D1.8F_.D1.82.D0.B5.D0.BE.D1.80.D0.B8.D1.8F_.D1.87.D0.B8.D1.81.D0.B5.D0.BB
2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва: Наука,” 1984 (первое издание в 1961 г.)
3. [4] Jr. Hoggat, V.E. Fibonacci and Lucas Numbers. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
4. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Harwood Limited, 1989.
5. Koshy, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley, 2001.
6. Livio, M. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. New York: Broadway Books, 2002.
7. Пойа Д. Математическое открытие (перевод с англ.). М.: Наука, 1970. – 452 с. (английское издание, том 1, 1962, том 2, 1965).

8. Последовательность Люка. Материал из Википедии — свободной энциклопедии https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%9B%D1%8E%D0%BA%D0%B0
9. Стахов А.П. Введение в алогритмическую теорию измерения. М.: Советское Радио, 1977.
10. Stakhov A.P. Assisted by Scott Olsen. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009. – 748 p.
11. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.
12. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, 23(2): 379- 389
13. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994
14. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
15. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (Русский перевод: Мидхат Газале. Гномон. От фараонов до фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272 с.)
16. Kappraff Jay. “Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth and Number”. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2002. – 584 p.
17. Татаренко А.А. Золотые T_m – гармонии и D_m – фракталы — суть солитоно-подобного Тm – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm
18. Аракелян Грант. Числа и величины в современной физике. Ереван: Изд. АН, 1989
19. Шенягин В.П. «Пифагор, или Каждый создает свой миф» - четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых s-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm
20. Косинов Н.В., Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321049.htm
21. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm
22. Falcon Sergio, Plaza Angel. On the Fibonacci k-numbers Chaos, Solitons & Fractals, Volume 32, Issue 5, June 2007 : 1615-1624
23. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
24. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
25. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва: Радио и Связь, 1984
26. Stakhov A.P. *Brousentsov’s ternary principle, Bergman’s number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic* // The Computer Journal, 2002, Vol. 45, No. 2, 221-236.
27. Alexey Stakhov, Samuil Aranson. Hilbert’s Fourth Problem as a Possible Candidate on the MILLENNIUM PROBLEM in Geometry. British Journal of Mathematics & Computer Science, 12 (4), 1-25, 2016
28. Alexey Stakhov. The “Golden” Number Theory and New Properties of Natural Numbers. British Journal of Mathematics & Computer Science 11(6): 1-15, 2015

29. Stakhov A., Aranson S. Assisted by Scott Olsen. The “Golden” Non-Euclidean Geometry. Hilbert’s Fourth Problem, :Golden” Dynamical Systems, and the Fine Structure Constant. World Scientific, 2016.
30. Alexey Stakhov. A generalization of the Cassini formula. Visual Mathematics, Volume 14, No.2, 2012