С.Л. Василенко

Матричные формы последовательностей Фибоначчи и золотого сечения

Аннотация. В статье систематизированы вопросы, связанные с использованием матричного исчисления в общей тематике золотого сечения. Представлены рекуренты, 3-диагональные матрицы, континуанты, перманенты и др. На основе матричного подхода показана бессодержательность и терминологическая безграмотность «обобщенных золотых сечений».

Одним безразличны ортогональные квадраты, другим – матрицы Адамара.

Матрица все зеркала обманывает.

В своей основе статья имеет обзорно-аналитический характер.

Матрица (лат. *matrix* первопричина, *matricis* матка) – широкое понятие. Рассматривается как источник и начало, образец и модель, штамп и шаблон.

В математике прямоугольная таблица, в программировании двумерный массив и.т.д.

Известны словесные образы, например аксиома всеобщности [1]: вода – матрица жизненных свойств, универсальная структурно-постоянная часть живой природы. Всеобщий элемент жизни, основа жизненных процессов в биосфере. Одним словом, матрица.

Некоторые авторы (С.Петухов и др.) даже полагают, что «многие реализации золотого сечения в живой и неживой природе связаны именно с матричной сущностью и матричным представлением золотого сечения» [2]. – Не беремся судить. При большом желании в любом утверждении можно найти логические двоично-бинарные элементы истины (1) и лжи (0).

Матрицы являются важным инструментом в различных разделах математики.

Вместе с тем матричное представление – слабо освещаемая форма. Хотя с точки зрения машинно-вычислительной реализации, во многих случаях именно матрицы дают наиболее рациональные решения, которые оптимально используют время и память ЭВМ, расширяясь на любую гомогенную линейную последовательность.

В частности, известно матричное тождество для чисел Фибоначчи, которое приводит Д.Кнут [3, с. 112]: $(F_{n+1}, F_n;\ F_n, F_{n-1}) = (1, 1;\ 1, 0)^n$.

В работах [4, 5] рассмотрена матрица золотого сечения G_{10} – симметричная квадратная матрица 10-го порядка, содержащая только элементы ± 1 и Φ^{-1}. С ней тесно связаны составленные из чисел ± 1 квадратные матрицы Белевича (с ортогональными столбцами) и Адамара (с нулевой диагональю), расширяя в целом представление о модульно двухуровневых квазиортогональных матрицах Мерсенна и Эйлера.

Золотое сечение возникает в задаче пропорционального деления <единичного> целого на две непересекающиеся части. Целое и его части уравновешиваются согласно пропорции $1 / b = b / (1 - b)$, образуя уникальную геометрическую прогрессию 1, b, b^2 с аддитивным свойством $1 = b + b^2$, где b – большая часть целого.

Числа Фибоначчи и золотое сечение – разные математические объекты, но органично связаны и взаимно дополняют друг друга. Их объединяет двучленно-аддитивная рекурсия $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ с её характеристическим квадратным уравнением $x^2 = x + 1$, положительный корень которого равен константе золотого сечения $\Phi = 1 / b = (1 + \sqrt{5}) / 2$.

Эти объекты можно изучать самостоятельно.

Однако их матричные вариации целесообразнее исследовать совместно, логико-методологическим методом дедукции, от общего к частному. – Начиная с общего представления линейных рекурсий, теория которых разработана достаточно хорошо.

Линейная рекурсия.

Линейная рекуррентная последовательность – всякая числовая последовательность z_n, задаваемая линейным рекуррентным соотношением k-го порядка

$$z_n = a_1 z_{n-1} + a_2 z_{n-1} + \ldots + a_k z_{n-k} \tag{1}$$

для всех $n \ge k$, заданных начальных условий – первых k членов $z_0, z_1, ..., z_{k-1}$ и числовых коэффициентах $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Линейная рекуррентная последовательность (ЛПР) часто называется линейной рекуррентой или линейным разностным (возвратным) уравнением [6].

Аддитивное соотношение (1) позволяет генерировать рекуррентные последовательности – линейные рекурсии с постоянными коэффициентами и дискретным индексом n.

Каждый элемент z_n вычисляется через k предшествующих элементов.

Равенству (1) соответствует характеристическое алгебраическое уравнение k-ой степени

$$x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_{k-1} x + a_k. \tag{2}$$

Задав начальные условия ("затравочные" числа) $Z = (z_0 \quad z_1 \quad \cdots \quad z_{k-1})^{\mathrm{T}}$, для $n \ge k$ получим определенную числовую последовательность z_n.

Теория ЛРП является аналогом теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейную рекуррентную последовательность z_n.

Для вычисления произвольного элемента z_n можно последовательно определять каждый член z_i, пока индекс i не станет равным n. Этот способ наиболее простой, но не самый эффективный, поскольку требует $O(n \cdot k)$ машинного времени.

Более результативным является матричный подход [7].

Запишем первые k членов последовательности в виде вектора $Z_0 = (z_{k-1}, \ldots, z_0)^{\mathrm{T}}$, где т – символ транспонирования, и следующую матрицу перехода или производящую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Структурно данная форма включает единичную матрицу, которая справа дополнена нулевым столбцом, а вверху строкой, состоящей из коэффициентов a_i характеристического алгебраического уравнения (2).

Последовательные умножения для любого натурального числа n дают векторы:

$$Z_1 = A \cdot Z_0 = (z_k, \ldots, z_1)^{\mathrm{T}}, \quad Z_2 = A \cdot Z_1 = (z_{k+1}, \ldots, z_2)^{\mathrm{T}}, \ldots, \quad Z_n = A \cdot Z_{n-1} = (z_n, \ldots, z_{n-k+1})^{\mathrm{T}},$$

Последний вектор-столбец состоит из k подряд идущих членов последовательности, начиная с z_n. Произведение матриц ассоциативно, поэтому можно записать $A^n \cdot Z_0 = Z_n$ или в развернутом виде (стрелки показывают направление возрастания индексов):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} z_{k-1} \\ z_{k-2} \\ z_{k-3} \\ \vdots \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{n+k-1} \\ z_{n+k-2} \\ z_{n+k-3} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матричное соотношение (4) позволяет вычислить кортеж элементов числового ряда, в общем случае для произвольных начальных условий $(z_0, \dots, z_{k-1})$ как первых членов рекурсии, которые одновременно не равны нулю.

Определение произвольного члена последовательности сводится к вычислению матрицы A^n, для чего необходимо: инициализировать матрицы Z_0 и A, возвести матрицу A в степень n, посчитать вектор $Z_n = A^n \cdot Z_0$ и выбрать из него z_n.

В основе метода лежит тождество $v^n = \left(v^{n/2}\right)^2$, следующее из ассоциативности операции умножения для любого числа v и четной степени n. Для нечетных значений n степень понижается на единицу: $v^n = v^{n-1}v$.

Данное тождество используется для бинарного (двоичного) возведения в степень, которое позволяет возводить любое число в n-ю степень за $O(\log n)$ умножений, вместо n умножений при обычном подходе.

Символ $O(\cdot)$ означает асимптотическую оценку сложности или времени работы-исполнения алгоритма, которую обычно проще получить, чем точную формулу для количества операций.

Матричное представление дает наиболее оптимальный алгоритм для вычисления больших чисел Фибоначчи F_n, для чего нужно возвести матрицу (1, 1; 1, 0) в степень n, выполнив всего лишь $O(\log n)$ умножений с применением целочисленной арифметики. – То есть за логарифмическое время.

В производящей матрице A (3) имеется единственная ломаная диагональ без нулей, содержащая множество единиц и коэффициент a_k.

Поэтому при любом порядке (размерности) k алгебраического уравнения (2) и наборе коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_k$ определитель матрицы $|A|$ равен: a_k, если k – нечетное, $-a_k$, если k – четное.

Или в формульном виде относительно k-го порядка уравнений (1)-(2)

$$|A| = (-1)^{k+1} a_k. \tag{5}$$

То есть, роль детерминанта играет свободный член характеристического уравнения, как например, показано в работе [8, с. 58] для $k = 2$.

Детерминант степени A^n следует из общих свойств матриц:

$$\left|A^n\right| = |A|^n = \left[(-1)^{k+1} a_k\right]^n.$$

С учетом свойств матриц, члены последовательности можно записать также в модифицированном эквивалентном виде

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{k-2} \\ z_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n+1} \\ \vdots \\ z_{n+k-2} \\ z_{n+k-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь числовые коэффициенты a_i расположены в нижней строке матрицы и выстраиваются в порядке убывания индексов, а элементы z_i в векторах, наоборот, в порядке их возрастания.

Особых предпочтений двух представлений (4) и (6) нет.

Кому как больше нравится...

Для начальных условий $(z_0, \dots, z_{k-1}) = (0, \dots, 0, 1)$ степени матриц непосредственно воспроизводят элементы последовательности z_i, расположенные в крайних столбцах

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cdots & z_n \\ \cdots & z_{n+1} \\ \cdots & \vdots \\ \cdots & z_{n+k-2} \\ \cdots & z_{n+k-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} z_{n+k-1} & \cdots \\ z_{n+k-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ z_{n+1} & \cdots \\ z_n & \cdots \end{pmatrix}$$

Числа Фибоначчи, 3-диагональные матрицы и перманенты.

Согласно теореме Якоби (1848) каждая симметричная матрица в области главных идеалов (математических объектов, которые ведут себя как целые числа в отношении делимости) конгруэнтна 3-диагональной матрице. Две вещественные матрицы B, C – конгруэнтны, если существует невырожденная матрица Q такая, что $B = Q^{\mathrm{T}} C Q$.

В линейной алгебре 3-диагональная матрица (матрица Якоби) – это ленточная матрица, которая имеет ненулевые элементы на главной диагонали, а также двух диагоналях выше и ниже главной диагонали

$$J_n = \begin{pmatrix} x_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & x_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Системы линейных алгебраических уравнений с 3-диагональными матрицами встречаются при решении многих задач математики и физики.

Определитель 3-диагональной матрицы задается континуантой её элементов – многочленом от нескольких переменных определенного типа. По правилу Эйлера континуанта $K_n(x_1, \dots, x_n)$ равна сумме всех одночленов, получаемых из одночлена $x_1 \dots x_n$ вычеркиванием всевозможных непересекающихся пар соседних переменных.

Например, $K_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5 + x_1x_4x_5 + x_1x_2x_5 + x_1x_2x_3 + x_1 + x_3 + x_5$.

Континуанту можно вычислить через определитель $|\cdot|$ 3-диагональной матрицы:

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x_n \end{vmatrix},$$

где на главной диагонали расположены элементы $(x_1, \dots, x_n)$, а над и под ней стоят 1 и –1.

При $x_1 = \ldots = x_n = 1$ континуанта – есть число Фибоначчи

$$F_{n+1} = K_n(1, \dots, 1).$$

Отсюда вытекает формализованное выражение для константы золотого сечения $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$ через предельное отношение определителей двух квадратных трехдиагональных матриц

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{K_n(1,\ldots,1)}{K_{n-1}(1,\ldots,1)} = \lim_{n\to\infty} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} .$$

Данное соотношение, возможно, не столь эффектно, как состоящая только из единиц бесконечная непрерывная (цепная) дробь $\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$. Но имеет чрезвычайную значимость для общей теории "золотого" математического феномена.

В общем виде последовательность определителей $\Delta_n = |J_n|$ 3-диагональной матрицы порядка n можно вычислить по рекуррентной формуле [9]

$$\Delta_n = x_n\Delta_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}\Delta_{n-2}$$

с начальными условиями $\Delta_{-1} = 0,\ \Delta_0 = 1$.

Если элементы матрицы удовлетворяют равенствам $x_j = 1,\ b_j c_j = -1$, то образуются числа Фибоначчи, с их последующим предельным соотношением в виде константы золотого сечения.

Перманент в математике [10] – числовая функция, определенная на множестве всех матриц. Для квадратных матриц функция похожа на детерминант, но отличается от него тем, что в разложении на перестановки (миноры) берутся не чередующиеся знаки, а все плюсы.

Кроме того, в отличие от детерминанта, определение перманента расширено и на прямоугольные матрицы.

Перманент инвариантен при перестановках строк и столбцов матрицы.

Перманентом многомерной матрицы называется сумма по всем диагоналям произведений элементов, стоящих на диагоналях.

Число Фибоначчи F_{n+1} является перманентом матрицы $M_{i,j} = \{1, |\,i-j\,| \le 1;\ 0, |\,i-j\,| > 1\}$ размером $n \times n$

$$F_{n+1} = \mathrm{Per}(M_{n\times n}) .$$

Перманент находит применение в дискретной математике и комбинаторике. Его нахождение в общем случае является сложной и трудоемкой вычислительной задачей.

Тем не менее, на пути развития квантовых технологий и квантовых вычислителей (компьютеров) уже реализованные фотонные процессоры способны вычислять именно перманент матрицы.

Числа Фибоначчи могут здесь стать отличным тестом. Или перифразом от Ю.Никулина: «тренируйтесь на кроликах».

Объединим формы определителя (детерминанта Det) и перманента (Per) для чисел Фибоначчи:

$$F_{n+1} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = \mathrm{Per}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} .$$

Учитывая свойства мнимой единицы $i^2 = -1$, число Фибоначчи F_{n+1} равно определителю 3-диагональной квадратной матрицы *n*-го порядка с единицами по главной диагонали, числом *i* по над- и поддиагонали (P.Deléham, 2013):

$$F_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{vmatrix}_{n\times n} .$$

Весьма эффектно выглядит эквивалентное представление 3-диагональной матрицы и соответствующее выражение для золотой константы

$$\lim_{n\to\infty} \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{vmatrix}_{n\times n} : \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = \Phi .$$

Вполне приемлемы и другие вариации с матрицами [11].

Например, определители 3-диагональных матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 8 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 7 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & \sqrt{6} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{6} & 5 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 13 & -\sqrt{5} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{5} & 3 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

соответственно дают частные последовательности из чисел Фибоначчи: $F_{4k-2}, F_{3k+3}, F_{2k+5}$.

Определители 3-диагональных матриц

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 6 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 7 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 18 & \sqrt{14} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{14} & 5 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 29 & \sqrt{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{11} & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

дают частные последовательности из чисел Люка: $L_{4k-2}, L_{3k+3}, L_{2k+5}$.

Таким образом, матричные представления последовательностей Фибоначчи и золотого сечения имеет довольно широкий спектр. И что важно, они приводят к оптимальным решениям по критерию минимизации времени и памяти вычислительных устройств.

Золотоносное "матричное вдохновение".

Рассматривая тему золотого сечения (ЗС) в матричном отображении, нельзя обойти стороной одну знаковую работу.

Автор «решил придумать матрицы, ... начал размышлять, ... проснулся с готовым решением, ... перед глазами возникла матрица» [12]:

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

«Душа наполнилась гордостью от того, что удалось придумать такую квадратную матрицу,… понял, что в руках интересное математическое открытие (?),... нашел ключевой принцип, который позволил определить детерминант любой Q_p-матрицы Det $Q_p = (–1)^{pn}$».

Далее он выражает «восхищение по поводу результата, ... невозможно вообразить, что p-числа Фибоначчи могут стать основой нового класса квадратных матриц, ... результат кажется абсолютно невероятным! Невозможно вообразить, чтобы для любого заданного p и n детерминант любой матрицы Q_p (а число таких матриц бесконечно!) был всегда равен либо (+1), либо (-1)! Возникает ощущение какой-то магии...».

Вот такие встречаются озарения-вдохновения на тернистом пути поиска новых научных знаний. Всегда ли они приводят к торжеству-триумфу исследовательской мысли? – Увы, за редкими исключениями. Иному представляется, "поймал бога за бороду". Разжал руку, а в ней пусто, – даже волосинки не осталось.

Что ж это за чудодейственные матрицы? – Легко видеть, что матрица $Q_p = A^{\mathrm{T}}$ – частный случай транспонированной матрицы перехода (3), в которой $p = k$, $a_1 = a_p = 1$, $a_2 = a_{p-1} = 0$ с линейной рекурсией $z_n = z_{n-1} + z_{n-p}$ и характеристическим уравнением $x^p = x^{p-1} + 1$.

Естественно, исходя из общей формулы (5), что детерминант $\left|Q_p\right|^n = \pm 1$.

Собственно и всё... Никакой магии, никакого математического открытия и нового класса квадратных матриц. Непосредственно по этой матрице нельзя даже вычислить значения ряда для произвольных начальных условий $\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \cdots & z_{p-1} \end{pmatrix}$, и тем более для неединичных коэффициентов $a_1, a_p \neq 1$.

Всё бы ничего. Как говорится, на здоровье. Но под ярким впечатлением ЗС, генерируемые числа по формуле $z_n = z_{n-1} + z_{n-p}$ автор называет «золотыми p-пропорциями» или «золотыми p-сечениями» (?), а матрицу Q_p – золотой. Только потому, что при $p = k = 2$ модель становится квадратичной с характеристическим уравнением $x^2 = x + 1$, положительный корень которого равен константе золотого сечения Ф.

Можно говорить о каких-то пропорциях, сечениях, корнях уравнения $x^p = x^{p-1} + 1$.

Только, причем здесь "золотая" окраска-терминология? – Линейное рекуррентное соотношение (1) и алгебраическое уравнение k-ой степени (2) тоже аккумулируют в себе ЗС при $k = 2$ и $a_1 = a_2 = 1$. Но никому в голову не приходит называть их золотыми. Ибо золотая пропорция одна единственна. Хочется как-то выделить новый объект, следует давать иную терминологию. Например, трином старших степеней [13], как частный случай общего представления возвратной линейно-аддитивной последовательности p-го порядка.

Достаточно вспомнить, как формировались названия по мере усложнения чисел:

натуральные → целые → рациональные → иррациональные → трансцендентные.

Пытаясь отстоять образный сленг «золотых p-сечений», автор приводит некие «родовые признаки для золотых p-пропорций» [14], призванные продемонстрировать «убедительные формальные свойства».

Однако выделение-назначение этих признаков совершенно не отражает какие-либо специфически-отличительные черты или особенности именно этой структуры [15], тем более с претензией на красочные "золотые" эпитеты:

1) Первый "родовой признак" фиксирует, что корень λ уравнения $x^p = x^{p-1} + 1$ ему же тождественен $\lambda^p \equiv \lambda^{p-1} + 1$.

Однако это абсолютно верно и очевидно для любого алгебраического уравнения. По определению корней! Так же как и цитируемое затем свойство-атрибут $x^p = x \cdot x^{p-1}$ степеней.

2) Другой признак акцентирует внимание на том, что для эквивалентной возвратной (рекуррентной) последовательности $f_{p+n} = f_{p-1+n} + f_n$ достоверно выполняется равенство для предела $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = \lambda$. Но это свойство также не является характерной чертой именно данной структуры.

Согласно теореме Бернулли, если λ – наибольший по модулю и единственный корень полинома общего вида, то практически для любого набора начальных условий эквивалентная полиному возвратная (рекуррентная) последовательность обладает указанным предельным свойством [16].

Остается только недоумевать от положений и выводов работы [14].

Матрицы против огульного золочения.

Описанный случай искусственного золочения не единственный.

Редкостные математические особенности золотой пропорции невольно породили элементы спекулятивной фетишизации в виде необоснованного порождения «обобщенных золотых сечений» (ОЗС) – терминологически безграмотных образований [17].

Следуя логике их прародителей (А.Стахов, Г.Аракелян, Э.Сороко и др.), на такие "обобщения" могут претендовать все структурные формы, описываемые алгебраическим уравнением общего вида n-го порядка (2).

Подобные псевдонаучные обобщения имеют мало общего с научной терминологией. Они провоцируют алогичное клонирование-тиражирование псевдозолотой пропорции и тем самым, симулируют иллюзорное представление об истинности золотой пропорции.

"Золотой" феномен настолько прост и одновременно значителен, внушителен, что не нуждается ни в каком дополнительном обобщении.

Он навечно занял заслуженный по праву пьедестал, как уникальная структура пропорционального соотнесения целого и его двух аддитивных частей.

Матричный подход убедительно и без особых затруднений показывает бессодержательность и терминологическую несостоятельность ОЗС.

Алгебраическое уравнение общего вида (2) и производящая матрица (3) априори содержат "золотое" решение в ряде частных случаев, при определенном подборе числовых коэффициентов. Но никто, нигде и никогда не называет их "золотыми". Ибо в пределах сферы применения термины должны быть однозначны и лишены экспрессии, с повышенным проявлением чувств, настроений и личных настроений.

Золотая матрица Петухова.

Есть другая форма искусственного терминологического золочения. Характерным примером является недавно обсуждаемую нами [18] модель "золотой геноматрицы" проф. С.Петухова [2, 19].

Он выделяет две и три водородные связи **C** = **G** = 3, **A** = **U** = 2, соединяющие комплементарные пары четырех азотистых оснований (алфавита генетического кода) в молекулах наследственности: аденин **A**, цитозин **C**, гуанин **G**, тимин **T** (или родственный ему урацил **U** в РНК), которые принципиально различимы и потому обозначаются разными буквами.

Далее он вводит квадратную симметрическую матрицу P_1 = (3, 2; 2, 3) и через произведение Кронекера образует «квинтовые мультипликативные геноматрицы» P_n, основанные на формальном произведении чисел 2 и 3:

$$P_1\left(\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow P_2\left(\begin{array}{cc|cc} 9 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 4 & 6 \\ \hline 6 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \end{array}\right) \Longrightarrow P_3\left(\begin{array}{cccc|cccc} 27 & 18 & 18 & 12 & 18 & 12 & 12 & 8 \\ 18 & 27 & 12 & 18 & 12 & 18 & 8 & 12 \\ 18 & 12 & 27 & 18 & 12 & 8 & 18 & 12 \\ 12 & 18 & 18 & 27 & 8 & 12 & 12 & 18 \\ \hline 18 & 12 & 12 & 8 & 27 & 18 & 18 & 12 \\ 12 & 18 & 8 & 12 & 18 & 27 & 12 & 18 \\ 12 & 8 & 18 & 12 & 18 & 12 & 27 & 18 \\ 8 & 12 & 12 & 18 & 12 & 18 & 18 & 27 \end{array}\right)$$

Каждая матрица P_n содержит только $n + 1$ разных чисел вида $2^i \cdot 3^j$.

Квинтовое название матриц он объясняет тем, что отношение 3/2 в теории музыкальной гармонии именуется квинтой.

В виду независимости произведения от перемены мест сомножителей, триплеты в октетной матрице P_3 становятся практически неразличимыми.

Так, любой порядок следования оснований **C**, **G**, **A** воспроизводится одним и тем же числом 18 = 3×3×2.

На основе золотой константы $\Phi = \phi^{-1} \approx 1.618$, исходя из формального равенства $\begin{pmatrix} \Phi & \phi \\ \phi & \Phi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, автор выстраивает аналогичный набор "золотых" геноматриц

$$\begin{pmatrix} \Phi & \phi \\ \phi & \Phi \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \Phi^2 & 1 & 1 & \phi^2 \\ 1 & \Phi^2 & \phi^2 & 1 \\ 1 & \phi^2 & \Phi^2 & 1 \\ \phi^2 & 1 & 1 & \Phi^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \Phi^3 & \Phi & \Phi & \phi & \Phi & \phi & \phi & \phi^3 \\ \Phi & \Phi^3 & \phi & \Phi & \phi & \Phi & \phi^3 & \phi \\ \Phi & \phi & \Phi^3 & \Phi & \phi & \phi^3 & \Phi & \phi \\ \phi & \Phi & \Phi & \Phi^3 & \phi^3 & \phi & \phi & \Phi \\ \Phi & \phi & \phi & \phi^3 & \Phi^3 & \Phi & \Phi & \phi \\ \phi & \Phi & \phi^3 & \phi & \Phi & \Phi^3 & \phi & \Phi \\ \phi & \phi^3 & \Phi & \phi & \Phi & \phi & \Phi^3 & \Phi \\ \phi^3 & \phi & \phi & \Phi & \phi & \Phi & \Phi & \Phi^3 \end{pmatrix}$$

При этом отмечает: «с удивлением обнаружил, что эти бисимметрические геноматрицы $P(n)$ связаны с золотым сечением».

Собственно и всё. Указанные матрицы нигде более не фигурируют, в генетике ничего не объясняют и никак не используется даже самим автором.

Главные особенности матрицы: матрица квадратная с четным числом строк и столбцов; степени константы Ф – все одновременно четные либо нечетные целые числа, положительные и отрицательные. Любая четная степень матрицы содержит только целые числа, исходя из общего равенства для чисел Люка $L_n = \Phi^n + (-\phi)^n$.

К "золотому" прилагательному матрицы нет возражений, ибо она построена на основе целочисленных степеней константы золотого сечения Ф. Но её "генетическая" окраска сродни шумовому эффекту с искусственным внедрением числа Ф.

Полезная игровая модель, не имеющая отношения к генетике. С помощью "золотой геноматрицы" не решается в принципе хотя бы одна задача в области генетики. Даже в порядке гипотезы-предположения.

Броское название лишь вводит в заблуждение, будто золотое сечение проникло в генетику и что-то там объясняет или определяет. Хотя ничего подобного нет.

Смысловая нагрузка константы Ф в геноматрице отсутствует. С её помощью ничего не показывается, не истолковывается.

В целом, включение золотого сечения в матрицы Петухова уводит в сторону от сути задачи, порождая некие иллюзии реальности.

Такая себе игра-манипуляция с числами на основе формальных совпадений, следующих из очевидных равенств:

$$\Phi \cdot \phi + \phi \cdot \Phi = 2, \quad \Phi^2 + \Phi^3 = 3.$$

Числа 2 и 3 можно воспроизвести в матричной форме десятками других способов.

Поэтому, признавая оригинальность авторского подхода к матричному представлению, вполне допустимо оставить название «золотой матрицы Петухова».

Она действительно "золотая". Но в ней, увы, нет ничего генетического. Несмотря на патетику, свойственную ряду исследователей золотоносной тематики: «Открытие Петухова показывает фундаментальную роль, которую играет "Золотое Сечение" в генетическом кодировании» [12].

Возможно, золотое сечение как-то и связано с генетикой, но только не из-за упомянутой «золотой матрицы».

Зато общеизвестная самая первая модель, сформулированная в биологической постановке, – это знаменитые числа Фибоначчи в его задаче о кроликах.

Не золотое руно, так хоть шерсти клок...

На основе геноматриц Петухова нельзя что-то истолковать или предсказать. Хотя сам подход заслуживает внимания, если отвлечься от константы ЗС, которая здесь лишь затуманивает общую идею и вызывает естественное отторжение.

Жаль, конечно, если кронекеровская линия в генетике останется невостребованной.

Попытаемся выровнять ситуацию. Пусть гипотетически, но хотя бы что-то генетическое объяснив. Лучше довольствоваться малым, чем остаться без всего.

Итак, начнем сначала...

Петухов говорит о матричном представлении генетического кода. В чём его суть?

Есть четыре разных буквы. Записываем их в виде естественной таблицы (матрицы).

Составляем сначала дуплеты, затем триплеты этих букв. В результате имеем бинарную операцию или вычисление <тензорного> произведения Кронекера для двух матриц, которому более сотни лет.

Такие комбинаторные сочетания элементарно составляются обычным перебором. Кронекерово произведение лишь позволяет компактно формализовать данную запись.

В чём же изюминка? – Если имеет место обычная операция для составления-записи возможных комбинаторных перестановок с повторениями, когда каждый предмет может участвовать в сочетании несколько раз.

Если уже идти по такому пути, то задача состоит не столько в том, чтобы включить красивые числа типа констант золотого сечения, сколько в подборе нужных чисел.

Нужных чисел в том смысле, чтобы из них получить максимум полезной информации. Или хотя бы что-то пояснить.

Матрица, составленная из четырех степеней константы ЗС, ничего не показывает и не объясняет. Такая себе симпатичная форма-игрушка для ортодоксов золотоносной тематики. Именно отсюда следуют некоторые восторженные голоса по поводу "золотой" геноматрицы. Не вникая в суть-содержание. Главным образом из-за термина, обвораживающего слух.

Что-нибудь новое, особенно в расшифровку закономерностей генетического кода, сама по себе формализованная операция Кронекера не вносит. Почему и не нашла применения в биологии.

С точки зрения затронутой темы хорошей корневой базой или ядром могут служить иные числовые матрицы, которые более интересны и, как далее увидим, репрезентативны.

Во всяком случае, они приводят к неочевидным результатам, позволяющим интерпретировать количество аминокислот.

В частности, на основе кронекеровских матриц из начальных чисел Фибоначчи и Люка.

Например, сформируем исходную квадратную матрицу $F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ из начальных чисел Фибоначчи 1, **1, 2, 3, 5**, 8, 13, 21...

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \Phi^3 + \phi^3 & \Phi^2 - \phi^2 \\ \Phi^5 + \phi^5 & \Phi^4 - \phi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы F_1 взаимно простые числа.

Порядок их следования выбран специально, чтобы определитель (детерминант) был равен единице $|F_1| = 1$. Значит, определитель любой целой степени (положительной или отрицательной) данной матрицы тоже всегда равен единице $\left| F_1^k \right| = 1$.

По аналогии с подходом Петухова, данную матрицу можно образовать возведением в квадрат таких матриц с иррациональными элементами:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \right]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right]^2.$$

В таком контексте структура F_1 похожа на матрицу с золотой константой, но существенным образом отличается от неё набором-составом элементов.

Образуем кронекеровы произведения:

$$F_2 = F_1 \otimes F_1;$$
$$F_3 = F_1 \otimes F_2.$$

$$F_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow F_2 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 10 & 6 & 5 & 3 \\ 10 & 5 & 6 & 3 \\ 25 & 15 & 15 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 20 & 12 & 10 & 6 & 10 & 6 & 5 & 3 \\ 20 & 10 & 12 & 6 & 10 & 5 & 6 & 3 \\ 50 & 30 & 30 & 18 & 25 & 15 & 15 & 9 \\ 20 & 10 & 10 & 5 & 12 & 6 & 6 & 3 \\ 50 & 30 & 25 & 15 & 30 & 18 & 15 & 9 \\ 50 & 25 & 30 & 15 & 30 & 15 & 18 & 9 \\ 125 & 75 & 75 & 45 & 75 & 45 & 45 & 27 \end{pmatrix}$$

Как видим, матрица F_2 размером 4×4 имеет 10 различных чисел, матрица F_3 размером 8×8 – соответственно 20 неодинаковых чисел.

Продолжая данную операцию по формуле $F_k = F_1 \otimes F_{k-1}$, получим набор матриц, в которых количество разных чисел равно: 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120...

Перед нами последовательность тетраэдрических или пирамидальных чисел с общей формулой $a_{n-1} = n(n+1)(n+2)/6$. Три последовательных натуральных числа обязательно имеют четное число и кратное трем, поэтому их произведение делится нацело на 6.

Каждое число матрицы F_3 однозначно определяется входящими в него тремя сомножителями.

Таким образом, имеем типичную задачу на число сочетаний с повторениями, то есть наборов, в которых каждый элемент может участвовать несколько раз. Число сочетаний с повторениями из n по k равно биномиальному коэффициенту C_{n+k-1}^{k}.

В нашем случае количество разных числовых элементов образованной матрицы F_3 размером 8×8 – есть число сочетаний с повторениями из 4 по 3 и равно $C_6^3 = 20$.

Каждое из чисел матрицы однозначно определяет состав перемножаемых чисел, соответствующих разным кодонам.

Естественно, порядок их следования не идентифицируется, поскольку произведение чисел не зависит от порядка следования сомножителей.

Интерпретировать квадратную матрицу $\mathrm{F}_1 = (2, 1; 5, 3)$ можно по-разному.

Например, числа 2 и 3 вполне можно считать водородными связями. Числа 1 и 5 – условной кодировкой других признаков.

Четыре соседних числа Фибоначчи $F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$ имеют уникальные свойства:

- определители матриц, образованных из этих чисел, равны единице:

$$\left|\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_{n+3} & F_{n+2} \end{pmatrix}\right| = 1, \ n = 2k \text{ – четное;}$$

$$\left|\begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+2} & F_{n+3} \end{pmatrix}\right| = 1, \ n = 2k + 1 \text{ – нечетное;}$$

- если $n \neq 3k$ – не кратно трем, то эти числа взаимно простые.

Нетрудно показать, что данные матрицы могут быть получены при возведении в квадрат следующих матриц, соответственно для четных и нечетных значений n:

$$n = 2k \qquad \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_{n+3} & F_{n+2} \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{F_{n+3} \pm 2}} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} \pm 1 & F_n \\ F_{n+3} & F_{n+2} \pm 1 \end{pmatrix}\right]^2;$$

$$n = 2k + 1 \qquad \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+2} & F_{n+3} \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{2F_{n+2} \pm 2}} \cdot \begin{pmatrix} F_n \pm 1 & F_{n+1} \\ F_{n+2} & F_{n+3} \pm 1 \end{pmatrix}\right]^2.$$

Аналогичным образом можно построить исходную матрицу на основе начальных чисел Люка **2, 1, 3**, 4, **7**, 11... Также с определителем, равным 1.

$$\mathrm{L}_1 = \begin{pmatrix} \Phi^1 - \phi^1 & \Phi^0 + \phi^0 \\ \Phi^2 + \phi^2 & \Phi^4 + \phi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Более подробно данная тема раскрыта в нашей работе [18]. Там же представлены разные числовые матрицы.

Конечно не эврика, но уже кое-что...

Во всяком случае, приведенные числовые матрицы позволяют обосновать количество аминокислот 20 в генетическом коде, как максимально возможное число сочетаний с повторениями из четырех азотистых оснований по их триплетам.

Особенно эффектно выделяется фибоначчиева матрица F_1 = (2, 1; 5, 3), основанная на первых числах Фибоначчи.

Можно использовать и другие 4-членные кортежи, начинающиеся с нечетных чисел Фибоначчи F_n для n, не кратному трем: (3, 5, 8, 13), (5, 8, 13, 21), (13, 21, 34, 55), …

Золотое сечение здесь присутствует, но не зримо. Как предельный аттрактор отношения соседних чисел Фибоначчи.

Это не просто хорошо, но очень даже замечательно.

На наш взгляд, отсутствие проявления точного ЗС в биологическом объекте – гарантия его жизни. И наоборот, встраивание ЗС в генетическую матрицу – предтеча вырождения биологического объекта как вида, болезни и в конечном итоге его исчезновение.

Подобные риски несет инбридинг и его ярко выраженная форма – инцест.

Пятый порядок в живом – это благо. ЗС в живом – "раковая опухоль", подавляющая иммунитет и сопротивляемость организма.

Благородные числа как пример точной и красивой терминологии.

Благородные числа [20, с. 236] или благородные сечения [21, с. 407] определяются как иррациональные числа, разложение которых в непрерывную (цепную) дробь заканчивается бесконечной последовательностью единиц $\overline{1}$: $\nu = [0; a_1, a_2, ..., a_n, \overline{1}]$.

То есть, имеем единение-сочетание совокупности единиц, а значит и золотой константы. Эта уникальная связь наглядно проявляется в непрерывных (цепных) дробях.

Благородные числа играют важную роль в структуре квазикристаллов и квазипериодическом пути-движении к хаосу нелинейных динамических систем, как научных объектов в вопросах развития многих процессов во Вселенной. Воистину "божьи числа".

Их родоначальником является малая константа золотой пропорции $\phi = [0; \overline{1}]$, для которой цепная дробь полностью состоит из единиц, кроме нулевого члена или целой части.

Благородное число можно записать как

$$\nu = \frac{A_n + \phi A_{n-1}}{B_n + \phi B_{n-1}}, \qquad (7)$$

где A_n, B_n – соответственно числитель и знаменатель подходящих рациональных дробей.

Можно ли называть данные числа "золотыми" или "золотоносными"? – Вполне. Хотя бы из-за наличия в их записи константы ϕ или корня из пяти. Плюс к этому согласованность и гармония цепных дробей в виде наличия бесконечного непрерывного ряда единиц $\overline{1}$.

Можно ли их именовать «обобщенными золотыми сечениями»? – Разве что с натяжкой. Когда нельзя, но сильно хочется...

Действительно, какие-то параллели-ассоциации просматриваются.

Но строго-понятийная взаимосвязь с золотым сечением отсутствует.

Такое осмысление ближе к терминологическому пониманию (состоянию), если любое вещественное число a записать в виде произведения $a = \Phi \cdot b$, где $b = a\phi$, и провозгласить "генетическую" связь константы a с золотым сечением. – К слову, один исследователь *p*-сечений так и делает многие годы.

Конечно, многое здесь зависит от взаимной договоренности в кругу научной общественности и формулирования непротиворечивых дефиниций.

Поэтому форму (7) англоязычные ученые исторически нарекли *noble number* или благородными числами. На наш взгляд, совершенно точно и корректно.

Вроде, как и связаны они с понятием золотого сечения, из среды благородных металлов. Но, увы, не такие золотые. Не та проба. Или наоборот охватывают более широкий пласт чисел, но без необязательного (даже вредного!) терминологического золочения.

Благо человеческий язык разнообразен и позволяет найти нужные точные слова.

Вместо заключения.

Числа Фибоначчи стали родоначальниками рекурсий и нашли применение во многих областях науки. Золотое сечение – уникальный математический объект со многими приложениями. Будучи второго порядка по определению, золотая пропорция позволила разрешить геометрическую проблему пятого порядка при построении пентаграммы.

Числа Фибоначчи и золотое сечение – матрицы (источник, матка) математики, как её наияркайшие числовые представители, "парламентарии".

Не удивительно, что сами они описываются методами матричного анализа. Причем ясно и четко, наиболее рационально используя время и память вычислительных устройств, что является залогом верности-надежности выбранного направления исследований.

Что касается термина "золотое сечение", он давно застолблен за единственным разбиением целого на две пропорциональные части с математической константой $\Phi = \phi^{-1}$.

Какие-либо обобщения этой постоянной противоречат здравому смыслу.

Не золотым сечением едины... Но это вовсе не означает, что его надо размножать. На грядке, ниве-поприще науки или офисном ксероксе.

Те же *p*-сечения, известные математикам более полувека, вполне самодостаточны, без дополнения "золотыми" эпитетами-прилагательными.

Если хочется поупражняться в математике сечений (пропорций) и как-то выделить предмет исследований, то следует находить новые подходящие термины, типа "металлических сечений", степенных триномов и др. Без упоминания слова *золотое* всуе. Например, трином старших степеней, – по характеристическому уравнению $x^p - x^{p-1} - 1 = 0$.

Noble number – тому замечательный пример.

Никто не называет "золотыми" алгебраическое уравнение общего вида (2) или матрицу (3), которые по определению содержат "золотое" решение в ряде частных случаев, при определенном подборе числовых коэффициентов.

Велосипед тоже с колесами, но не автомобиль.

Автомобиль оборудован выхлопной трубой для отводимых газов, но не самолет.

«Люди избавились бы от половины своих неприятностей, если бы смогли договориться о значении слов… Мало иметь хороший ум, главное – хорошо его применять» [22].

Cogito ergo sum…

Литература:

1. Василенко С.Л. Экобезопасность водоснабжения: аксиоматика, принципы, системотехника / Вісник Одеської державної академії будівництва і архітектури. – 2015. – Вып. 59. – С. 163-169.

2. Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и Золотое сечение // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 13422, 09.06.2006. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321018.htm.

3. Кнут Д.Э. Искусство программирования, том 1. Основные алгоритмы. Пер. с англ. 3-е изд. – М.: Вильямс, 2006. – 720 с.

4. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Матрица золотого сечения G10 // Информационно-управляющие системы. – 2013. – № 6. – С. 2-6. – URL: http://mathscinet.ru/files/2013Gold_N6.pdf.

5. Балонин Н.А., Востриков А.А., Сергеев М.Б. Бициклические матрицы золотого сечения // Информационно-управляющие системы. – 2020. – № 5. – С. 5-11.

6. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

7. Быстрое вычисление членов линейной рекуррентной последовательности. – URL: https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Быстрое_вычисление_членов_линейной_рекуррентной_последовательности / Вычисление линейных рекуррентных последовательностей. – URL: studfile.net/preview/5826382/page:21/.

8. Ясинский С.А. Основы унификации элементарной математики для инженеров-исследователей и место в ней "золотого" сечения. – СПб.: ВАС, 2006. – 124 с. / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15365, 26.06.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321129.htm.

9. El-Mikkawy M.E.A. On the inverse of a general tridiagonal matrix // Applied Mathematics and Computation, 2004, **150**(3), 669–679.

10. Минк Х. Перманенты. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 211 с.

11. Cahill N.D., Narayan D.A. Fibonacci and Lucas Numbers as Tridiagonal Matrix Determinants // The Fibonacci Quarterly 42.3 (2004), 216-221. – URL: fq.math.ca/Papers1/42-3/quartcahill03_2004.pdf.

12. Стахов А.П. Матричный подход в «теории Золотого Сечения» и "золотые" геноматрицы Сергея Петухова // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 13439, 15.06.2006. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321050.htm.

13. Василенко С.Л. "Фантомы" золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 01.07.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=77&sm=2.

14. Стахов А.П. «Родовые признаки» для обобщенных золотых сечений // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17515, 10.06.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321260.htm.

15. Василенко С.Л. Реструктуризация золотого сечения: от частного к общему // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17556, 03.07.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161975.htm.

16. Василенко С.Л. Гармоническая пропорция в линейных разностных уравнениях // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15330, 09.06.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321111.htm.

17. Василенко С.Л. Дуализм модели золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23987, 23.11.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163516.htm.

18. Василенко С.Л. Числовые модели в матричной генетике // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23818, 12.10.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163443.htm.

19. Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 316 с.

20. Hardy G.H., Wright E.M. An Introduction to the Theory of Numbers: 5th ed. – Oxford, England: Clarendon Press, 1979. – 433 p.

21. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы: Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ "РХД", 2001. – 528 с.

22. Декарт Р. Сочинения в 2 т. Пер. с лат. и франц. Т. 1. – М.: Мысль, 1989. - 654 с.

Харьков, Украина

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html